

Die Konstruktion E-optimaler Stopzeiten

48

Franz Baur

—
1975
—



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551923_0024

Die Konstruktion E-optimaler Stopzeiten

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Fakultät für Mathematik
der
Ludwig-Maximilians-Universität München

Vorgelegt von Franz Baur im Oktober 1974

1. Berichterstatter: Prof. Dr. V. Mammitzsch

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Richter

Tag der mündlichen Prüfung: 28.2.1975



Inhaltsverzeichnis:

Einleitung und Zusammenfassung	1
§ 1 Die lexikographische Ordnung in $\mathbb{R}^J$	4
§ 2 Problemstellung und Diskussion der Voraussetzungen	7
§ 3 Konstruktion und Charakterisierung E-optimaler Stopzeiten unter Zusatzvoraussetzungen	18
§ 4 Konstruktion von Hilfsfunktionen	32
§ 5 Die Konstruktion der Snell'schen Enveloppe	58
§ 6 Die Bestimmung E-optimaler Stopzeiten als Grenzwerte konvergenter Folgen	68
§ 7 Anwendung auf die Theorie der Sequenztests	84
Liste der verwendeten Symbole und Bezeichnungen	92
Literaturverzeichnis	93

Einleitung und Zusammenfassung

Dieser Arbeit liegt folgende Situation zugrunde:

Gegeben ist ein Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ und eine aufsteigende Folge von σ -Körpern über Ω : $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}$. Ferner ist $\mathcal{G} = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ eine Familie von $\mathcal{F}_t$ -meßbaren, m -integrierbaren Funktionen $g_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^J$, wobei $J = \{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ oder $J = \mathbb{N}$ ist.

Unser Ziel ist es, Stopzeiten T_0 zu konstruieren, welche $\{\int g_T dm : T \text{ Stopzeit}\} \subset \mathbb{R}^J$ minimieren, und zwar bezüglich der lexikographischen oder E-Ordnung in $\mathbb{R}^J$.

Für den Fall $J = \{1\}$ gibt es eine Reihe von Arbeiten, in denen unter gewissen Voraussetzungen an $\mathcal{G}$ die Existenz derartiger "(E-)optimaler" Stopzeiten nachgewiesen wird und Konstruktionsverfahren für sie angegeben werden (siehe etwa [2], [3], [5], [7] und [10]).

Für $J = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, kennt man bisher unter analogen Voraussetzungen lediglich Aussagen über die Existenz E-optimaler Stopzeiten (siehe [4] und die Sätze (4.1) und (5.2) von [5]). Nur falls die "Snell'sche Envelope" zu $\mathcal{G}$ bekannt ist (vgl. hierzu Definition (3.16)), lassen sich gemäß [5], § 5, alle E-optimalen Stopzeiten zu $\mathcal{G}$ bestimmen.

Wir wollen in der vorliegenden Arbeit für gewisse $\mathcal{G}$ die Existenz E-optimaler Stopzeiten konstruktiv beweisen, indem wir ein Verfahren zur Berechnung der zugehörigen Snell'schen Envelope entwickeln. Ferner werden wir eine Charakterisierung aller E-optimalen Stopzeiten angeben. Dabei gehen wir folgendermaßen vor:

Zusammenfassung:

In § 1 untersuchen wir kurz die lexikographische Ordnung in $\mathbb{R}^J$ und stellen ihre wichtigsten Eigenschaften zusammen.

In § 2 formulieren und diskutieren wir die Voraussetzungen an $\mathcal{G}$, unter denen wir E-optimale Stopzeiten berechnen wollen. Die Familien $\mathcal{G}$, die diese Bedingungen erfüllen, nennen wir zulässig (siehe (2.5)). Um zulässig zu sein, muß eine Familie $\mathcal{G} = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ in geeigneter Weise nach unten beschränkt sein und für $t \rightarrow \infty$ gegen $\vec{\infty}$ wachsen ($\vec{\infty}$ ist dabei der Vektor, dessen sämtliche Komponenten ∞ sind); ferner muß (bei $J \neq \{1\}$) für jede Stopzeit T das Integral $\int_{\Omega} g_T \, d\mu$ endlich sein, sofern die erste Komponente dieses Integrals endlich ist.

§ 3 befaßt sich mit der Konstruktion und Charakterisierung E-optimaler Stopzeiten, falls ein Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{N})$ von Familien $\mathcal{G} = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ und $\mathcal{N} = (u_t)_{t \in \mathbb{N}}$ mit gewissen Eigenschaften vorliegt. Hierbei definieren wir unter zunächst noch abgeschwächten Voraussetzungen (vgl. (3.1)) feste Stopzeiten, mit deren Hilfe sich unter stärkeren Bedingungen (siehe (3.11,b)) die E-optimale Stopzeiten zu $\mathcal{G}$ bestimmen lassen. Sind diese stärkeren Bedingungen erfüllt, so ist $\mathcal{N}$ die Snell'sche Enveloppe zu $\mathcal{G}$, d.h. es gilt für alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast $u_t = \text{ess-E-min } \{E(g_T(t) | \mathcal{F}_t) : T(t) \text{ ist Stopzeit mit } T(t) \geq t \text{ und } \int_{\Omega} g_T(t) \, d\mu < \vec{\infty}\}$.

Nach diesem Paragraphen besteht unsere Aufgabe also darin, für zulässiges $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{N}$ zu konstruieren, so daß das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{N})$ die erwähnten Voraussetzungen (nämlich (3.11,b)) erfüllt.

In § 4 werden die zu dieser Konstruktion nötigen Hilfsmittel bereitgestellt. Wir betrachten hier die eindimensionale zulässige Familie $\mathcal{G} = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$. Ist dann $\mathcal{f} = (f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ein zulässiges Submartingal mit $f_t \leq g_t$ m_t -fast für jedes $t \in \mathbb{N}$, und sind $\mathcal{K} = ({}_t K)_{t \in \mathbb{N}}$ und $\mathcal{L} = ({}_t L)_{t \in \mathbb{N}}$ Familien von Elementen ${}_t K, {}_t L \in \mathcal{F}_t$, so bilden wir für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $k \geq t$ Funktionen ${}^k \varphi_t(\mathcal{G}, \mathcal{f}; \mathcal{K}, \mathcal{L})$, die jeweils in k monoton wachsend sind und bei geeigneten Voraussetzungen an $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ eine endliche Grenzfunktion $\varphi_t(\mathcal{G}, \mathcal{f}; \mathcal{K}, \mathcal{L})$ besitzen.

Im Spezialfall ${}_tK := \emptyset$ und ${}_tL := \Omega$ für alle $t \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die entsprechenden Funktionen (bei fest gewähltem $\mathcal{G}$) mit ${}_t\psi_t(\mathcal{G})$, bzw. $\psi_t(\mathcal{G})$, und wir definieren hierbei auch monoton fallende Funktionen ${}_t\psi_t(\mathcal{G})$, die gegen die Grenzfunktion $\psi_t(\mathcal{G})$ konvergieren. Schließlich untersuchen wir noch, wann die Familien $\psi(\mathcal{G}) := (\psi_t(\mathcal{G}))_{t \in \mathbb{N}}$ und $\psi(\mathcal{G}) := (\psi_t(\mathcal{G}))_{t \in \mathbb{N}}$ übereinstimmen.

§ 5 beinhaltet das Konstruktionsverfahren für $\tilde{M}$ bei zulässigem $\mathcal{G}$ (und beliebigem $J = \{1, \dots, n\}$ oder $J = \mathbb{N}$). Die Berechnung von $\tilde{M}$ geschieht komponentenweise. Wir indizieren die i -ten Komponenten der Funktionen mit (i) und geben für jedes $i \in J$ ein zulässiges Submartingal $\mathcal{F}^{(i)} = (f_t^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}$ vor mit $f_t^{(i)} \leq E(g_T^{(i)} | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast für alle Stopzeiten $T^{(i)} \geq t$, für die das Integral $\int_{\Omega} g_T^{(i)} dm$ endlich ist ($t \in \mathbb{N}$).

Dann setzen wir zunächst für alle $t \in \mathbb{N}$ $u_t^{(1)} := \psi_t(\mathcal{F}^{(1)})$ (gebildet zu $\mathcal{G}^{(1)}$). Sind für $i \geq 2$ die ersten $i-1$ Komponenten von $\tilde{M}$ gegeben, so bilden wir hiermit die Mengen ${}_tK^{(i)}$ und ${}_tL^{(i)} \in \mathcal{F}_t$, und mit $\mathcal{R}^{(i)} := ({}_tK^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}$ und $\mathcal{L}^{(i)} := ({}_tL^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}$ erhalten wir die i -te Komponente von $\tilde{M}$, indem wir $u_t^{(i)} := \psi_t(\mathcal{G}^{(i)}, \mathcal{F}^{(i)}; \mathcal{R}^{(i)}, \mathcal{L}^{(i)})$ setzen. Auf das Paar $(\mathcal{G}, \tilde{M})$ sind dann alle Aussagen von § 3 anwendbar.

§ 6 untersucht zwei Fälle, in denen sich E-optimale Stopzeiten als Grenzwerte monotoner Folgen $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Abbildungen $T_j : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gewinnen lassen.

In § 7 zeigen wir, daß mit den Ergebnissen dieser Arbeit die Berechnung von A-Ecken des Risikobereichs eines unendlichstufigen Testproblems für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(r,n)}$, $A \geq 0$, möglich ist. Dabei ist das Testproblem gemäß (5.1) von [5] gegeben.

§ 1 Die lexikographische Ordnung in $\mathbb{R}^J$

Im ersten Paragraphen wollen wir uns kurz mit der lexikographischen Ordnung in $\mathbb{R}^J$ vertraut machen. Dabei sei $J = \{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ oder $J = \mathbb{N}$ fest gewählt.

(1.1) Definition:

Seien $x = (x_i)_{i \in J}$, $y = (y_i)_{i \in J} \in \mathbb{R}^J$. Dann gelte

- a) $x \overset{E}{\leq} y$ definitionsgemäß genau dann, wenn $x = y$ ist, oder wenn ein $l \in J$ existiert mit
 $x_i = y_i$ für alle $i \in \{1, \dots, l-1\}$ und
 $x_l < y_l$;
- b) $x \overset{E}{<} y$ definitionsgemäß genau dann, wenn $x \overset{E}{\leq} y$ und $x \neq y$ gilt.

Die wichtigsten Eigenschaften dieser Relation " $\overset{E}{\leq}$ " fassen wir zusammen in der

(1.2) Bemerkung:

Die Relation " $\overset{E}{\leq}$ " ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch, vollständig und linear, d.h. für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^J, \lambda \geq 0$, gilt:

- a) $x \overset{E}{\leq} x$
- b) aus $x \overset{E}{\leq} y$ und $y \overset{E}{\leq} z$ folgt $x \overset{E}{\leq} z$
- c) aus $x \overset{E}{\leq} y$ und $y \overset{E}{\leq} x$ folgt $x = y$
- d) stets ist $x \overset{E}{\leq} y$ oder $y \overset{E}{\leq} x$
- e) aus $x \overset{E}{\leq} y$ folgt $x + z \overset{E}{\leq} y + z$,
und aus $x \overset{E}{\leq} y$ folgt $\lambda x \overset{E}{\leq} \lambda y$.

Diese Aussagen ergeben sich unmittelbar aus der Definition (1.1).

(1.3) Definition:

Sei $M \subset \mathbb{R}^J$. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^J$ heißt E-Minimum von M , wenn $x_0 \in M$ und $x_0 \overset{E}{\leq} x$ für alle $x \in M$ gilt; wir schreiben $x_0 = E\text{-min } M$.

Neben der lexikographischen Ordnung haben wir es im weiteren Verlauf auch mit der gewöhnlichen (Halb-) Ordnung in $\mathbb{R}^J$ zu tun. Hierzu sei folgendes festgestellt:

(1.4) Bemerkung:

Für zwei Punkte $x = (x_i)_{i \in J}$, $y = (y_i)_{i \in J} \in \mathbb{R}^J$ schreiben wir $x \leq y$ (bzw. $x < y$) genau dann, wenn für alle $i \in J$ $x_i \leq y_i$ (bzw. $x_i < y_i$) gilt. Auch mit " $\leq$ " ist bekanntlich eine reflexive, transitive, antisymmetrische und lineare Relation gegeben, die jedoch nicht vollständig ist; auch folgt aus $x \leq y$ und $x \neq y$ nicht, daß $x < y$ ist.

Ist $x \leq y$, so ist trivialerweise $x \overset{E}{\leq} y$.

Im $\mathbb{R}^1$ stimmen die beiden Relationen " $\leq$ " und " $\overset{E}{\leq}$ " überein.

Wir werden später auch von Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^J$ sprechen. Darunter verstehen wir dann stets komponentenweise Konvergenz, d.h.

(1.5) Bemerkung:

Für $(x_t)_{t \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^J$ mit $x_t = (x_t^{(i)})_{i \in J}$ für alle $t \in \mathbb{N}$ und $x = (x^{(i)})_{i \in J} \in \mathbb{R}^J$ gelte $x = \lim_{t \rightarrow \infty} x_t$ genau dann, wenn für alle $i \in J$ $x^{(i)} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_t^{(i)}$ gilt; mit anderen Worten: $\mathbb{R}^J$ sei versehen mit der von der Menge $\{f_i : \mathbb{R}^J \rightarrow \mathbb{R},$

$x = (x_i)_{i \in J} \mapsto f_i(x) := x_i : i \in J\}$ erzeugten schwachen Topologie. (Diese stimmt für $J = \{1, \dots, n\}$ natürlich mit der gewöhnlichen Topologie des $\mathbb{R}^n$ überein.)

Schließlich betrachten wir noch das Verhalten von integrierbaren Funktionen gegenüber der E-Ordnung. Hierzu definieren wir zunächst:

(1.6) Definition:

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum mit σ -finitem Maß μ auf $\mathcal{F}$.

- a) $f = (f_i)_{i \in J} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^J$ heißt $\mathcal{F}$ -meßbar (μ -integrierbar), wenn für alle $i \in J$ $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ -meßbar (μ -integrierbar) ist.
- b) Ist $f = (f_i)_{i \in J} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^J$ μ -integrierbar, so schreiben wir $\int_{\Omega} f d\mu := (\int_{\Omega} f_i d\mu)_{i \in J}$.
- c) Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}, \mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ ein Unter- σ -Körper über Ω und $f = (f_i)_{i \in J} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^J$ μ -integrierbar, so schreiben wir für den bedingten Erwartungswert: $\mathcal{E}(f | \mathcal{K}) := (\mathcal{E}(f_i | \mathcal{K}))_{i \in J}$.

Damit gilt der

(1.7) Satz:

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum mit σ -finitem Maß μ auf $\mathcal{F}$ und sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^J$ μ -integrierbar. Dann gilt:

- a) Ist $f(\omega) \geq 0$ für μ -fast alle $\omega \in \Omega$, so ist $\int_{\Omega} f d\mu \geq 0$.
- b) Ist $f(\omega) \geq 0$ für μ -fast alle $\omega \in \Omega$ und ist $\int_{\Omega} f d\mu = 0$, so gilt $f(\omega) = 0$ μ -fast.

Zum Beweis siehe in [8] Beispiel (3.1,1), Definition (3.2), Satz (3.3) und Seite 62.

§ 2 Problemstellung und Diskussion der Voraussetzungen

Dieser Arbeit liegt folgende Situation zugrunde:

(2.1) Voraussetzung:

Gegeben ist ein Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ und eine aufsteigende Folge von σ -Körpern über $\Omega : \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}$.

Dabei treffen wir folgende

(2.2) Vereinbarung:

a) Für alle $t \in \mathbb{N}$ sei $m_t := m|_{\mathcal{F}_t}$.

Ist wie in § 1 $J = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, oder $J = \mathbb{N}$, so gelte ferner:

b) $\tilde{\mathcal{M}}_J$ bezeichne die Menge aller Familien $\mathcal{G} = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $g_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^J$, wobei die g_t für alle $t \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_t$ -meßbar und m_t -integrierbar seien; es sei $\tilde{\mathcal{M}} := \tilde{\mathcal{M}}_{\{1\}}$.

c) $\mathcal{M}_J$ bezeichne die Menge aller Familien $\mathcal{G} = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $g_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^J$, wobei für jedes $t \in \mathbb{N}$ g_t $\mathcal{F}_t$ -meßbar und m_t -integrierbar sei; es sei $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{\{1\}}$.

d) Für $\mathcal{G} = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{M}}_J$ sei $\mathcal{E}(\mathcal{G}) := (\mathcal{E}(g_t|_{\mathcal{F}_t}))_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_J$.

Nun definieren wir die Begriffe "Stopzeit" und "E-optimale Stopzeit". Dazu sei wieder $J = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, oder $J = \mathbb{N}$.

(2.3) Definition:

a) Eine Abbildung $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ heißt eine Stopzeit der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ (bezüglich m), wenn gilt:

i) $\{T \leq t\} := \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{N}$

ii) $m(\{T = \infty\}) = 0$.

- b) Sei $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathcal{M}}_J$ und sei T eine Stopzeit der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\mathbb{m}$. Dann setzen wir

$$g_T(\omega) := \begin{cases} g_{T(\omega)}(\omega) = \sum_{t=1}^{\infty} \chi_{\{T=t\}}(\omega) \cdot g_t(\omega), & \text{falls } T(\omega) < \infty \\ 0, & \text{falls } T(\omega) = \infty \end{cases}$$

(Dabei sei für ein $A \subset \Omega$ mit χ_A die Indikatorfunktion von A bezeichnet).

- c) Sei $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathcal{M}}_J$. Dann heißt eine Stopzeit T_0 der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ E-optimal zu g (bzw. optimal zu g bei $J = \{1\}$), wenn gilt: $\int_{\Omega} g_{T_0} d\mathbb{m} =$

$$= E - \min \left\{ \int_{\Omega} g_T d\mathbb{m} : T \text{ ist Stopzeit der Familie } (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}} \right\} > -\vec{\infty}.$$

($-\vec{\infty}$ sei hierbei der Vektor, dessen sämtliche Komponenten $-\infty$ sind.)

Unser Ziel ist es, ein Konstruktionsverfahren für E-optimale Stopzeiten zu entwickeln. Wir können uns d. zu auf die Klasse $\widetilde{\mathcal{M}}_J$ beschränken; denn ist $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathcal{M}}_J$, so gilt für jede Stopzeit T Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{t=1}^{\infty} \chi_{\{T=t\}} \cdot g_t d\mathbb{m} &= \sum_{t=1}^{\infty} \int_{\{T=t\}} g_t d\mathbb{m} = \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \int_{\{T=t\}} E(g_t | \mathcal{F}_t) d\mathbb{m} = \int_{\Omega} \sum_{t=1}^{\infty} \chi_{\{T=t\}} \cdot E(g_t | \mathcal{F}_t) d\mathbb{m}, \end{aligned}$$

d.h.

(2.4) Bemerkung:

Ist $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathcal{M}}_J$, so ist eine Stopzeit T_0 genau dann E-optimal zu g , wenn sie E-optimal zu $E(g)$ ist.

Der Angabe, für welche Familien $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathcal{M}}_J$ wir E-optimale Stopzeiten berechnen wollen, dient die

(2.5) Definition:

Sei $J = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, oder $J = \mathbb{N}$.

a) Es sei $\mathcal{M}_J^0 := \{g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_J : \text{es gilt } \liminf_{t \in \mathbb{N}} g_t(\omega) = -\infty$
 m -fast, und es existiert eine m -integrierbare Funktion
 $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^J$ mit $g_t \geq \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}\}$;
 Wir setzen $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M}_{\{1\}}^0$.

b) Zulässig (bezüglich J) nennen wir eine Familie $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$
 aus $\mathcal{M}_J$ mit $g_t = (g_t^{(i)})_{i \in J}$ für jedes $t \in \mathbb{N}$, wenn
 $g \in \mathcal{M}_J^0$ ist und wenn für jede Stopzeit T mit $\int_{\Omega} g_T^{(1)} dm < \infty$
 auch $\int_{\Omega} g_T dm < \infty$ gilt.

Genau für die zulässigen $g \in \mathcal{M}_J$ werden wir E -optimale Stop-
 zeiten konstruieren. Bei $J = \{1\}$ ist die Familie g na-
 türlich genau dann zulässig, wenn sie aus $\mathcal{M}_0$ ist.

Die Menge $\mathcal{M}_J^0$ wollen wir jetzt genauer untersuchen. Dazu genügt
 es, jede einzelne Komponente der $\mathbb{R}^J$ -wertigen Funktionen zu betrach-
 ten, d.h. wir können uns auf die Untersuchung von $\mathcal{M}_0$ beschrän-
 ken. Zunächst halten wir fest:

(2.6) Bemerkung:

Ist $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_0$ und T eine Stopzeit, so ist
 $\int_{\Omega} g_T dm > -\infty$.

Beweis:

Es ist $\int_{\Omega} g_T dm = \sum_{t=1}^{\infty} \int_{\{T=t\}} g_t dm \geq \sum_{t=1}^{\infty} \int_{\{T=t\}} \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t) dm = \int_{\Omega} q dm > -\infty$.

Nun führen wir einige Begriffe ein, die wir im folgenden und auch
 in § 4 verwenden werden.

(2.7) Definition:

Eine Familie $f = (f_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{M}}$ heißt gleichgradig integrierbar,
 wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $v \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle
 $t \in \mathbb{N}$ $\int_{\{|f_t| \geq v\}} |f_t| dm \leq \varepsilon$ gilt.

Wir werden später folgende Aussage brauchen, deren Beweis sich aus [1], (20.5) ergibt:

(2.8) Bemerkung:

Sei $\mathcal{f} = (f_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathcal{M}}$ mit $f_t \geq 0$ m -fast für alle $t \in \mathbb{N}$ und sei $(f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ nach Wahrscheinlichkeit konvergent gegen 0, d.h. es gelte $\lim_{t \rightarrow \infty} m(\{|f_t| \geq \varepsilon\}) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$.

Dann ist $\mathcal{f}$ genau dann gleichgradig integrierbar, wenn $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_t \, dm = 0$ gilt.

Ferner definieren wir:

(2.9) Definition:

Sei $\mathcal{f} = (f_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$.

- a) $\mathcal{f}$ heißt ein Submartingal (der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$) genau dann, wenn für alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast $f_t \leq E(f_{t+1} | \mathcal{F}_t)$ gilt.
- b) $\mathcal{f}$ heißt ein Martingal (der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$) genau dann, wenn für alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast $f_t = E(f_{t+1} | \mathcal{F}_t)$ gilt.

Wir werden diese beiden Begriffe nur zur Vereinfachung der Sprechweise gebrauchen. Lediglich folgende Tatsache nutzen wir aus:

(2.10) Bemerkung:

Ist $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine m -integrierbare Funktion, so ist $(E(q | \mathcal{F}_t))_{t \in \mathbb{N}}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal, es existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} E(q | \mathcal{F}_t)$ (m -fast), und dieser Grenzwert stellt eine m -integrierbare Funktion dar. Dies folgt aus [1], (60.3) und (60.4).

Auf $\widetilde{\mathcal{M}}$ führen wir noch eine Halbordnung ein:

(2.11) Definition:

Seien $f = (f_t)_{t \in \mathbb{N}}$, $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$. Wir schreiben $f \stackrel{(m)}{\leq} g$ (bzw. $f \stackrel{(m)}{=} g$) genau dann, wenn für alle $t \in \mathbb{N}$ m -fast $f_t \leq g_t$ (bzw. $f_t = g_t$) gilt.

Reflexivität, Transitivität und Antisymmetrie dieser Relation " $\stackrel{(m)}{\leq}$ " sind klar.

Aus $f \stackrel{(m)}{\leq} g$ folgt trivialerweise $E(f) \stackrel{(m)}{\leq} E(g)$.

Um nun zu verdeutlichen, welche Familien $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ zu $\mathcal{M}_0$ gehören, formulieren wir uns eine Reihe von Bedingungen und vergleichen sie miteinander.

(2.12) Bedingungen:

Für ein $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ betrachten wir folgende Eigenschaften:

- I) Es gilt:
- $\int_{\Omega} \inf_{t \in \mathbb{N}} g_t \, d\mu > -\infty$
 - $\liminf_{t \in \mathbb{N}} g_t(\omega) = \infty$ m -fast
- II) Für alle $t \in \mathbb{N}$ läßt g_t sich schreiben in der Form $g_t(\omega) = c(t) + q_t(\omega)$, wobei gilt:
- $\int_{\Omega} \inf_{t \in \mathbb{N}} q_t \, d\mu > -\infty$
 - $0 \leq c(1) \leq c(2) \leq \dots$ und $c(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$
- III) $g \in \mathcal{M}_0$
- IV) Es existiert ein $g^* = (g_t^*)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ mit $E(g^*) \stackrel{(m)}{=} g$
- und
- $\int_{\Omega} \inf_{t \in \mathbb{N}} g_t^* \, d\mu > -\infty$
 - $\liminf_{t \in \mathbb{N}} g_t^*(\omega) = \infty$ m -fast.

- V) Für alle $t \in \mathbb{N}$ läßt g_t sich schreiben in der Form $g_t(\omega) = c(t) + q_t(\omega)$, wobei gilt:
- a) es existiert eine m -integrierbare Funktion $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast $q_t \geq \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$ gilt.
 - b) $0 \leq c(1) \leq c(2) \leq \dots$ und $c(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$.
- VI) Für alle $t \in \mathbb{N}$ läßt g_t sich schreiben in der Form $g_t(\omega) = c_t(\omega) + r_t(\omega)$ mit m -integrierbaren Funktionen $c_t, r_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, wobei gilt:
- a) es existiert eine m -integrierbare Funktion $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathcal{E}(r_t | \mathcal{F}_t) \geq \mathcal{E}(r | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$.
 - b) $c_1(\omega) \leq c_2(\omega) \leq \dots$ m -fast und $c_t(\omega) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ m -fast.
- VII) Es existiert ein Submartingal $\phi = (f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}_0$ mit $\phi \leq^{(m)} g$.

Dann gilt der

(2.13) Satz:

Für die in (2.12) aufgeführten Bedingungen gelten folgende Beziehungen:

- a) I) ist äquivalent mit II).
- β) Die Bedingungen III), IV), V), VI) und VII) sind zueinander äquivalent.
- γ) Aus I) folgt III), aus III) dagegen folgt nicht I).
- δ) 1. Erfüllt g die Bedingung I), so ist in IV) $g^* = g$ wählbar.
2. Ist g^* zu g gemäß IV) gegeben, so kann man in VI) $c_t := \inf_{j > t} g_j^*$, $t \in \mathbb{N}$, und $r := 0$ setzen.
3. Ist g gemäß V) mit $g_t = c(t) + q_t$ gegeben, so läßt sich in VI) $c_t := c(t)$, $t \in \mathbb{N}$, und $r := q$ wählen.
4. Ist g mit $g_t = c_t + r_t$ gemäß VI) gegeben, so ist $(\mathcal{E}([c_t + r] | \mathcal{F}_t))_{t \in \mathbb{N}}$ ein f gemäß VII).

Beweis:

α) folgt aus [5], (4.3), (4.3') und (4.4).

β) Wir zeigen: "Aus III) folgt IV)":

Sei $q \in \mathcal{M}_0$ mit $g_t \geq \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$; setze für alle $t \in \mathbb{N}$ $g_t^* := g_t + q - \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$, sowie $q^* := (g_t^*)_{t \in \mathbb{N}}$. Dann gilt: $\mathcal{E}(g_t^* | \mathcal{F}_t) = g_t$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$, also $\mathcal{E}(q^*) \stackrel{(m)}{=} q$. Ferner ist $\inf_{t \in \mathbb{N}} g_t^* = \inf_{t \in \mathbb{N}} (g_t + q - \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)) =$

$$q + \inf_{t \in \mathbb{N}} (g_t - \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)) \geq q \text{ m-fast,}$$

und $\liminf_{t \in \mathbb{N}} g_t^*(\omega) \geq q(\omega) + \liminf_{t \in \mathbb{N}} g_t(\omega) - \limsup_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)(\omega) =$
 $= \infty$ m -fast (wegen (2.10) und $q \in \mathcal{M}_0$).

Wir zeigen: "Aus IV) folgt V)":

Erfüllt q IV), so erfüllt das dazugehörige $q^* = (g_t^*)_{t \in \mathbb{N}}$ die Bedingung I), und zwar bezüglich der Folge von σ -Körpern $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ mit $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}$ für alle $t \in \mathbb{N}$.

Wegen α) existieren daher $c(t)$ und ρ_t mit $g_t^* = c(t) + \rho_t$, $t \in \mathbb{N}$, und $0 \leq c(1) \leq c(2) \leq \dots$, $c(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$, sowie $\int \inf_{t \in \mathbb{N}} \rho_t \, dm > -\infty$.

Wir setzen $q_t := g_t - c(t)$, $t \in \mathbb{N}$, und $q := \inf_{t \in \mathbb{N}} \rho_t$.

Dann gilt m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$: $q_t = g_t - c(t) =$
 $= \mathcal{E}(g_t^* | \mathcal{F}_t) - c(t) = c(t) + \mathcal{E}(\rho_t | \mathcal{F}_t) - c(t) = \mathcal{E}(\rho_t | \mathcal{F}_t) \geq$
 $\geq \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$.

Wir zeigen: "Aus V) folgt VII)":

Sei V) erfüllt; setze für alle $t \in \mathbb{N}$ $f_t := c(t) + \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$, $f := (f_t)_{t \in \mathbb{N}}$.
 f ist dann trivialerweise ein Submartingal mit $f \stackrel{(m)}{\leq} q$.

Ferner gilt $f_t \geq \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$, $t \in \mathbb{N}$, sowie m -fast wegen (2.10) $\liminf_{t \in \mathbb{N}} f_t(\omega) \geq \liminf_{t \in \mathbb{N}} c(t) + \liminf_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t) = \infty$, also ist $f \in \mathcal{M}_0$.

Daß aus VII) die Bedingung III) folgt, ist klar; denn ist $f \in \mathcal{M}_0$ und $f \stackrel{(M)}{\sim} g$, so ist auch $g \in \mathcal{M}_0$.

Wir haben nun noch nachzuweisen, daß auch VI) mit den anderen Bedingungen äquivalent ist.

Klar ist dabei, daß die Gültigkeit von V) die von VI) nach sich zieht. Ist andererseits VI) erfüllt, so ist die Familie

$f = (f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ mit $f_t := \mathcal{E}([c_t + r] | \mathcal{F}_t)$ für alle $t \in \mathbb{N}$ selbstverständlich ein Submartingal mit $f \stackrel{(M)}{\sim} g$. Ferner genügt f der Bedingung IV), da

$$\int_{\Omega} \inf_{t \in \mathbb{N}} (c_t + r) dm = \int_{\Omega} (c_1 + r) dm > -\infty \quad \text{und} \quad \liminf_{t \in \mathbb{N}} (c_t + r) = \infty \text{ gilt.}$$

Folglich liegt f in $\mathcal{M}_0$, da die Äquivalenz der Bedingungen III) und IV) bereits nachgewiesen ist. Damit erfüllt g die Bedingung VII).

γ) Trivial ist, daß III) aus I) folgt.

Wir zeigen anhand eines Beispiels, daß die Umkehrung hiervon nicht richtig ist.

Beispiel (*):

Sei $\Omega := \mathbb{N}$, $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω , $m(\{n\}) := \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für alle $t \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{F}_t$ die Borel-Erweiterung $\mathcal{L}(\{1\}, \{2\}, \dots, \{t-1\}, \{t, t+1, t+2, \dots\})$.

$$\begin{aligned} \text{Wir setzen } q(n) &:= -n - \frac{2n}{n^2}, \text{ dann ist } \int_{\mathbb{N}} q(n) dm = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n - \frac{2n}{n^2}}{2^n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > -\infty, \end{aligned}$$

also ist q m -integrierbar.

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)(n) &= \begin{cases} -n - \frac{2n}{n^2} & \text{für } n \leq t-1 \\ \frac{1}{m(\{1, \dots, t\})} \cdot \sum_{l=t}^{\infty} \frac{1}{2^l} \left[-1 - \frac{2}{l^2}\right] & \text{für } n \geq t \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{also: } \mathcal{E}(q|\mathcal{J}_t)(n) = \begin{cases} -n - \frac{2^n}{n^2} & \text{für } n \leq t-1 \\ -2^{t-1} \left[\sum_{l=t}^{\infty} \frac{1}{2^l} + \sum_{l=t}^{\infty} \frac{1}{l^2} \right] & \text{für } n \geq t \end{cases}$$

$$(\text{denn } m(\{l \geq t\}) = \sum_{l=t}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^{t-1}}).$$

$$\text{Es gilt } \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 2 \quad (\text{denn für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < 1 \text{ gilt}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} x^l \quad (\text{Taylor-Entwicklung um Nullpunkt})$$

$$\text{Daraus folgt durch Differentiation: } \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot x^{l-1},$$

$$\text{woraus sich für } x = \frac{1}{2} \text{ ergibt: } 4 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{l-1}} = 2 \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l},$$

$$\text{d.h. } \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 2).$$

$$\text{Folglich ist für alle } t \in \mathbb{N} \quad \sum_{l=t}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1+t-1}{2^{1+t-1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{t-1}} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1+t-1}{2^l} = \frac{1}{2^{t-1}} [(t-1) + 2] = \frac{t+1}{2^{t-1}}.$$

Wir setzen nun für alle $t \in \mathbb{N}$ $c(t) := t + 1$, und damit $g_t(n) := c(t) + \mathcal{E}(q|\mathcal{J}_t)(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann erfüllt $\mathcal{G} = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ die Bedingung V) und wegen β) auch die Bedingung III); doch $\mathcal{G}$ erfüllt nicht I), denn es ist

$$\inf_{t \in \mathbb{N}} g_t(n) \leq g_n(n) = c(n) - 2^{n-1} \left[\sum_{l=n}^{\infty} \frac{1}{2^l} + \sum_{l=n}^{\infty} \frac{1}{l^2} \right] =$$

$$= n + 1 - 2^{n-1} \left[\frac{n+1}{2^{n-1}} + \sum_{l=n}^{\infty} \frac{1}{l^2} \right] = -2^{n-1} \cdot \sum_{l=n}^{\infty} \frac{1}{l^2}.$$

$$\text{Dabei gilt } \sum_{l=n}^{\infty} \frac{1}{l^2} \geq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_n^{\infty} = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$\text{also ist } \inf_{t \in \mathbb{N}} g_t(n) \leq -2^{n-1} \cdot \frac{1}{n}, \quad \text{und damit}$$

$$\int_{\Omega} \inf_{t \in \mathbb{N}} g_t(n) \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2^{n-1}}{n \cdot 2^n} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty, \quad \text{d.h.}$$

a) von I) ist nicht erfüllt.

δ) 1., 3. und 4. sind klar, oder sie wurden im Beweis von β) mitbewiesen.

2. Sei IV) erfüllt; setze $c_t(\omega) := \inf_{j \geq t} g_j^*(\omega)$,

$$r_t(\omega) := g_t(\omega) - c_t(\omega), \quad r := 0$$

Dann gilt: $c_1(\omega) \leq c_2(\omega) \leq \dots$, $c_t(\omega) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ m-fast,

$$\text{und } E(r_t | \mathcal{F}_t) = E(g_t | \mathcal{F}_t) - E(c_t | \mathcal{F}_t) =$$

$$= E(g_t^* | \mathcal{F}_t) - E(\inf_{j \geq t} g_j^* | \mathcal{F}_t) \geq 0 = E(r | \mathcal{F}_t) \text{ m}_t\text{-fast}$$

für alle $t \in \mathbb{N}$.

Zum Abschluß dieser ausführlichen Erörterung führen wir einige Abkürzungen ein, deren Zweckmäßigkeit sich im Verlauf unserer Arbeit erweisen wird.

(2.14) Definition:

Sei $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_0$; dann setzen wir:

a) $\mathcal{M}_1(g) := \{f = (f_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathcal{M}} : E(f) \in \mathcal{M}_0, E(f) \stackrel{(\mathbb{N})}{\leq} g \text{ und } E(f) \text{ ist Submartingal}\}$

b) $\mathcal{M}_2(g) := \{f = (f_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_1(g) : \text{für alle } t \in \mathbb{N} \text{ gilt m}_t\text{-fast } E(f_t | \mathcal{F}_t) \leq E(g_T(t) | \mathcal{F}_t) \text{ für alle Stopzeiten } T^{(t)} \text{ der Familie } (\mathcal{F}_j)_{j \geq t} \text{ mit } \int_{\Omega} g_T(t) \, d\mu < \infty\}$

c) $\mathcal{M}_3(g) := \{f = (f_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_0 : \text{für alle } t \in \mathbb{N} \text{ gilt m}_t\text{-fast } f_t = \min(g_t, E(f_{t+1} | \mathcal{F}_t))\}$.

(2.15) Bemerkung:

Für alle $g \in \mathcal{M}_0$ gilt:

- a) $f = (f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ mit $\mathcal{E}(f) \in \mathcal{M}_0$ liegt genau dann in $\mathcal{M}_1(g)$, wenn für alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast $\mathcal{E}(f_t | \mathcal{F}_t) \leq \min(g_t, \mathcal{E}(f_{t+1} | \mathcal{F}_t))$ gilt.
- b) $\mathcal{M}_3(g) \subset \mathcal{M}_1(g)$
- c) Ist $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ gemäß (2.12, VI) mit $g_t = c_t + r_t$ und $\mathcal{E}(r_t | \mathcal{F}_t) \geq \mathcal{E}(r | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$, gegeben, so ist die Familie $(c_t + r)_{t \in \mathbb{N}}$ ein Element aus $\mathcal{M}_2(g)$.

Beweis:

a) und b) sind klar nach Definition (2.14).

c) $(c_t + r)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_1(g)$ folgt aus (2.13, 6, 4.).

Sei nun $t \in \mathbb{N}$, sei $T^{(t)}$ Stopzeit der Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t}$ mit $\int_{\Omega} g_{T^{(t)}} dm < \infty$ und sei $A \in \mathcal{F}_t$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_A g_{T^{(t)}} dm &= \sum_{j=t}^{\infty} \int_{A \cap \{T^{(t)}=j\}} g_j dm = \sum_{j=t}^{\infty} \int_{A \cap \{T^{(t)}=j\}} (c_j + r_j) dm = \\ &= \sum_{j=t}^{\infty} \int_{A \cap \{T^{(t)}=j\}} c_j dm + \sum_{j=t}^{\infty} \int_{A \cap \{T^{(t)}=j\}} \mathcal{E}(r_j | \mathcal{F}_j) dm \geq \\ &\geq \sum_{j=t}^{\infty} \int_{A \cap \{T^{(t)}=j\}} c_t dm + \sum_{j=t}^{\infty} \int_{A \cap \{T^{(t)}=j\}} \mathcal{E}(r | \mathcal{F}_j) dm = \\ &= \int_A c_t dm + \sum_{j=t}^{\infty} \int_{A \cap \{T^{(t)}=j\}} r dm = \int_A (c_t + r) dm. \end{aligned}$$

Also gilt: $\mathcal{E}([c_t + r] | \mathcal{F}_t) \leq \mathcal{E}(g_{T^{(t)}} | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

Aus (2.15c) wissen wir nun insbesondere, daß $\mathcal{M}_2(g)$ und $\mathcal{M}_1(g)$ nicht leer sind. Später werden wir auch $\mathcal{M}_3(g) \neq \emptyset$ zeigen und dabei weitere Elemente dieser Mengen kennenlernen.

§ 3 Konstruktion und Charakterisierung E-optimaler Stopzeiten unter Zusatzvoraussetzungen

Unter einer anderen Voraussetzung als der in (2.5) definierten Zulässigkeit wollen wir in diesem Paragraphen Verfahren zur Konstruktion und Charakterisierung E-optimaler Stopzeiten angeben.

(3.1) Voraussetzung:

Sei $J = \{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ oder $J = \mathbb{N}$.

Gegeben sei ein Paar $(g, \mathcal{U})$ mit $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{U} = (u_t)_{t \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{M}_J$, wobei gelte:

- Für alle $t \in \mathbb{N}$ sei m_t -fast $u_t = E - \min(g_t, \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{F}_t))$
- Es existiere eine m -integrierbare Funktion $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^J$ und eine Folge $(c(t))_{t \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^J$ mit $0 \leq c(1) \leq c(2) \leq \dots$, $c(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$, so daß für alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast $g_t \geq c(t) + \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$ und $u_t \geq c(t) + \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$ gilt.

Mit den Bezeichnungen von § 2 könnten wir Teil b) dieser Voraussetzung auch anders formulieren:

(3.2) Bemerkung:

Sei $J = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, oder $J = \mathbb{N}$, und seien

$g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{U} = (u_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_J$ mit

$g_t = (g_t^{(i)})_{i \in J}$, $u_t = (u_t^{(i)})_{i \in J}$ für alle $t \in \mathbb{N}$.

Wir setzen für alle $i \in J$ $g^{(i)} := (g_t^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{U}^{(i)} := (u_t^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- Das Paar $(g, \mathcal{U})$ erfüllt die Bedingung (3.1, b).
- Für alle $i \in J$ sind $g^{(i)}$ und $\mathcal{U}^{(i)}$ aus $\mathcal{M}_0$.
- Sowohl g als auch $\mathcal{U}$ sind aus $\mathcal{M}_J^0$.

Beweis:

Die Äquivalenz von 2) und 3) ist klar.

Erfüllt $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ (3.1,b), so folgt 2) wegen (2.13,β). Gilt

2), so existieren wegen (2.13,β) für alle $i \in J$, $t \in \mathbb{N}$, $c_1^{(i)}(t)$, $q_{t,1}^{(i)}$, $q_1^{(i)}$, $c_2^{(i)}(t)$, $q_{t,2}^{(i)}$, $q_2^{(i)}$ mit

$g_t^{(i)} = c_1^{(i)}(t) + q_{t,1}^{(i)}$, $u_t^{(i)} = c_2^{(i)}(t) + q_{t,2}^{(i)}$, wobei für $j = 1, 2$

$0 \leq c_j^{(i)}(1) \leq c_j^{(i)}(2) \leq \dots$, $c_j^{(i)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$, sowie m_t -fast

$\mathcal{E}(q_{t,j}^{(i)} | \mathcal{F}_t) \geq \mathcal{E}(q_j^{(i)} | \mathcal{F}_t)$ gilt.

Wir setzen dann für alle $t \in \mathbb{N}$

$c(t) := (c^{(i)}(t))_{i \in J}$ mit $c^{(i)}(t) := \min(c_1^{(i)}(t), c_2^{(i)}(t))$, $i \in J$,

und $q := (q^{(i)})_{i \in J}$ mit $q^{(i)} := \min(q_1^{(i)}, q_2^{(i)})$, $i \in J$.

Damit ist dann (3.1,b) erfüllt.

Später werden wir zu jedem zulässigen $\mathcal{Q}$ ein $\mathcal{M}$ konstruieren, so daß für $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ (3.1) richtig ist. Somit wird sich erweisen, daß (3.1) in Wirklichkeit nicht stärker ist als die Forderung der Zulässigkeit von $\mathcal{Q}$. Für die Zwecke dieses Paragraphen (siehe Beweis von (3.6), Punkt 3)) würde es übrigens genügen, in (3.1,b) statt $g_t \geq c(t) + \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$ nur $g_t \geq \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$ zu fordern. Weil wir jedoch später, wenn wir $\mathcal{M}$ zu $\mathcal{Q}$ konstruieren, die Zulässigkeit von $\mathcal{Q}$ benutzen werden, brächte diese Abschwächung keinen Vorteil.

Bemerkt sei auch noch, daß im Fall $J = \{1\}$ aus (3.1,a)

$g_t \geq u_t$ und damit aus $u_t \geq c(t) + \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$ bereits

$g_t \geq c(t) + \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$ folgt.

Mit Hilfe der g_t und u_t definieren wir nun folgende Mengen und Stopzeiten:

(3.3) Definition:

Sei Voraussetzung (3.1) erfüllt.

Wir setzen für alle $t \in \mathbb{N}$:

$${}_t G := \{g_t \stackrel{F}{\neq} \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{F}_t)\}, G_t := \bigcup_{1 \leq t} {}_1 G, G_0 := \emptyset$$

$${}_t H := \{g_t \stackrel{E}{\leq} \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{F}_t)\}, H_t := \bigcup_{1 \leq t} {}_1 H, H_0 := \emptyset$$

Ferner definieren wir:

$$T^* := t \text{ auf } G_t \cap \overline{G_{t-1}}, t \in \mathbb{N}$$

$$T^* := \infty \text{ sonst}$$

$$T_* := t \text{ auf } H_t \cap \overline{H_{t-1}}, t \in \mathbb{N}$$

$$T_* := \infty \text{ sonst}$$

(Der Querstrich bedeute dabei die Komplementbildung).

Unmittelbar aus der Definition ergibt sich die

(3.4) Bemerkung:

Es gilt für alle $t \in \mathbb{N}$:

$$a) {}_t G, {}_t H, G_t, H_t, \{T^* = t\}, \{T_* = t\} \in \mathcal{F}_t.$$

$$b) {}_t G \subset {}_t H, \{T^* = t\} \subset G_t, \{T_* = t\} \subset H_t, \{T^* \leq t\} = G_t, \\ \{T_* \leq t\} = H_t.$$

Ferner gilt:

$$c) T^* \geq T_*$$

Die Bedeutung der Funktionen u_t wird deutlich durch die folgenden Hilfssätze:

(3.5) Hilfssatz:

Es gelte (3.1). Für alle $t \in \mathbb{N}$ sei ${}_t B \in \mathcal{F}_t$ mit

$${}_t G \subset {}_t B \subset {}_t H, B_t := \bigcup_{1 \leq t} {}_1 B, B_0 := \emptyset.$$

$$\text{Wir setzen } T_0 := t \text{ auf } B_t \cap \overline{B_{t-1}}, t \in \mathbb{N},$$

$$T_0 := \infty \text{ sonst.}$$

Dann gilt für alle $t \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\Omega} u_1 \, dm = \int_{B_t} g_{T_0} \, dm + \int_{\overline{B_t}} u_{t+1} \, dm .$$

Beweis:

Für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt wegen (3.1,a) und (3.3):

- a) $B_t \cap \overline{B_{t-1}} \subset {}_tB \subset {}_tH$, also ist auf $B_t \cap \overline{B_{t-1}}$ m_t -fast $u_t = g_t$.
- b) $\overline{B_t} \subset \overline{{}_tB} \subset \overline{{}_tG}$, also ist auf $\overline{B_t}$ m_t -fast $u_t = \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{F}_t)$.

Hiermit beweisen wir die Behauptung durch Induktion nach t :

$t = 1$: Wegen a) und b) gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_1 \, dm &= \int_{B_1} u_1 \, dm + \int_{\overline{B_1}} u_1 \, dm = \\ &= \int_{B_1} g_1 \, dm + \int_{\overline{B_1}} \mathcal{E}(u_2 | \mathcal{F}_1) \, dm = \\ &= \int_{B_1} g_{T_0} \, dm + \int_{\overline{B_1}} u_2 \, dm . \end{aligned}$$

$t - 1 \rightarrow t$: Nach Induktionsvoraussetzung und wegen a) und b) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t \, dm &= \int_{B_{t-1}} g_{T_0} \, dm + \int_{\overline{B_{t-1}}} u_t \, dm = \\ &= \int_{B_{t-1}} g_{T_0} \, dm + \int_{B_t \cap \overline{B_{t-1}}} u_t \, dm + \int_{\overline{B_t} \cap \overline{B_{t-1}}} u_t \, dm = \\ &= \int_{B_{t-1}} g_{T_0} \, dm + \int_{B_t \cap \overline{B_{t-1}}} g_t \, dm + \int_{\overline{B_t}} \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{F}_t) \, dm = \\ &= \int_{B_t} g_{T_0} \, dm + \int_{\overline{B_t}} u_{t+1} \, dm . \end{aligned}$$

Damit können wir nun beweisen:

(3.6) Hilfssatz:

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von (3.5) gilt:

T_0 ist Stopzeit (der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ bezüglich m).

Beweis:

Zu zeigen ist nur $m(B) = 1$ mit $B := \bigcup_{t \in \mathbb{N}} B_t$.

Wir setzen für jedes $t \in \mathbb{N}$: $\tilde{q}_t := \int_{B_t} g_{T_0} \, dm$, $\tilde{q}_t := \int_{\bar{B}_t} u_{t+1} \, dm$.

Dann gilt für alle $t \in \mathbb{N}$:

$$1) \int_{\Omega} u_1 \, dm = \tilde{q}_t + \tilde{q}_t \quad (\text{wegen (3.5)}) .$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \tilde{q}_t &= \int_{\bar{B}_t} u_{t+1} \, dm \geq \int_{\bar{B}_t} c(t+1) \, dm + \int_{\bar{B}_t} \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_{t+1}) \, dm = \\ &= m(\bar{B}_t) \cdot c(t+1) + \int_{\bar{B}_t} q \, dm \quad (\text{wegen (3.1,b)}) , \end{aligned}$$

wobei wegen der m -Integrierbarkeit von q das Integral $\int q \, dm$ für $t \rightarrow \infty$

gegen den endlichen Wert $\int_{\bar{B}} q \, dm \in \mathbb{R}^J$ konvergiert (etwa

nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz).

Ferner gilt:

- 3) $\tilde{q}_t$ konvergiert für $t \rightarrow \infty$ gegen den endlichen Wert $\int_B g_{T_0} \, dm \in \mathbb{R}^J$, denn da m_t -fast $g_t \geq \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)$ ist, gilt mit $\chi_t := \sum_{l=1}^t \chi_{B_l \cap \bar{B}_{l-1}} \cdot (g_l - \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_l))$ ebenfalls m_t -fast: Es ist $\chi_t \geq 0$, monoton nicht fallend in t und m_t -integrierbar.

Dabei ist, wenn wir für jedes $i \in J$ die i -te Komponente von Funktionen und Integralen mit (i) indizieren,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \chi_t^{(i)} \, dm &= \int_{B_t} g_{T_0}^{(i)} \, dm - \sum_{l=1}^t \int_{B_l \cap \bar{B}_{l-1}} \mathcal{E}(q^{(i)} | \mathcal{F}_l) \, dm = \\ &= \tilde{q}_t^{(i)} - \int_{B_t} q^{(i)} \, dm = \\ &= \int_{\Omega} u_1^{(i)} \, dm - \tilde{q}_t^{(i)} - \int_{B_t} q^{(i)} \, dm \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\Omega} u_1^{(i)} \, dm - c^{(i)} (t+1) \cdot m(\overline{B}_t) - \int_{\overline{B}_t} q^{(i)} \, dm - \int_{B_t} q^{(i)} \, dm \leq \\ &\leq \int_{\Omega} u_1^{(i)} \, dm - \int_{\Omega} q^{(i)} \, dm < \infty \end{aligned}$$

(wobei 1) und 2) benützt wurde).

Also folgt nach dem Satz von der monotonen, integralbeschränkten Konvergenz: $\int_{\Omega} \chi_t \, dm \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \int_B g_{T_0} \, dm - \int_B q \, dm \in \mathbb{R}^J$.

Wegen $\sum_{l=1}^t \int_{B_l \cap \overline{B}_{l-1}} \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_l) \, dm = \int_{B_t} q \, dm \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \int_B q \, dm \in \mathbb{R}^J$

folgt daraus die behauptete Beziehung: $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\gamma}_t = \int_B g_{T_0} \, dm \in \mathbb{R}^J$.

- 4) Wir nehmen nun an, es sei $m(B) < 1$. Dann ist $m(\overline{B}) > 0$, und es existiert ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $t \in \mathbb{N}$ $m(\overline{B}_t) > \epsilon$ gilt. Folglich ist $c(t+1) \cdot m(\overline{B}_t) \geq \epsilon \cdot c(t+1) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$, und wir erhalten wegen 3) und 2) aus 1):

$$\int_{\Omega} u_1 \, dm = \overline{\gamma}_t + \overline{\gamma}_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty, \text{ Widerspruch.}$$

Also gilt $m(B) = 1$, was zu beweisen war.

Aus dem Beweis von (3.6) läßt sich noch mehr herleiten:

(3.7) Hilfssatz:

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von (3.5) gilt:

$$\int_{\Omega} u_1 \, dm \geq \int_{\Omega} g_{T_0} \, dm.$$

Beweis:

Aus (3.6) und dem Beweis von (3.6) wissen wir:

$$\int_{\Omega} u_1 \, dm = \overline{\gamma}_t + \overline{\gamma}_t \text{ für alle } t \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Dabei gilt } \overline{\gamma}_t \geq c(t+1) \cdot m(\overline{B}_t) + \int_{\overline{B}_t} q \, dm \geq \int_{\overline{B}_t} q \, dm.$$

$$\text{Folglich ist } \int_{\Omega} u_1 \, dm \geq \overline{\gamma}_t + \int_{\overline{B}_t} q \, dm.$$

Ferner wissen wir: $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}_t = \int_B g_{T_0} \, dm = \int_{\Omega} g_{T_0} \, dm$

sowie: $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\tilde{B}_t} q \, dm = \int_{\tilde{B}} q \, dm = 0$.

Damit erhalten wir durch Grenzübergang in t die Behauptung.

Insbesondere ergibt sich aus (3.6) und (3.7) der

(3.8) Satz:

Sei (3.1) erfüllt.

Dann sind T^* und T_* Stopzeiten mit $T^* \geq T_*$.

Dabei gilt: $\int_{\Omega} u_1 \, dm \geq \int_{\Omega} g_{T^*} \, dm$, $\int_{\Omega} u_1 \, dm \geq \int_{\Omega} g_{T_*} \, dm$.

Für eine Stopzeit T untersuchen wir nun eine Reihe von Eigenschaften, die sich mit Hilfe der Definition (3.3) formulieren lassen:

(3.9) Bedingungen:

Sei (3.1) erfüllt. Dann betrachten wir folgende Bedingungen an eine Stopzeit T der Familie $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in \mathbb{N}}$:

- I) 1) $g_T = u_T$ m -fast ;
- 2) $\{T = t\} \subset {}_t H$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$.
- II) 1') $T \leq T^*$ m -fast ;
- 2') $G_t = \{T^* \leq t\} \subset \{T \leq t\}$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$;
- 3') ${}_t G \subset \{T \leq t\}$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$;
- 4') $\{T = t\} \subset \overline{{}_t G_{t-1}} = \{T^* \geq t\}$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$;
- 5') auf $\{T > t\}$ gilt $u_t = \mathcal{E}(u_{t+1} | \tilde{\mathcal{F}}_t)$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$.
- III) 1") $T_* \leq T$ m -fast;
- 2") $\{T \leq t\} \subset \{T_* \leq t\} = H_t$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$;
- 3") $\{T = t\} \subset \{T_* \leq t\} = H_t$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$.

- IV) 1'') es gilt I,1) und II,1') ;
 2'') $\{T = t\} \subset {}_tH \cap \overline{{}_tG_{t-1}}$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$;
 3'') für alle $t \in \mathbb{N}$ existieren ${}_tB \in \mathcal{F}_t$ mit
 ${}_tG \subset {}_tB \subset {}_tH$ und $\{T = t\} = {}_tB \cap \overline{{}_tB_{t-1}}$ m_t -fast,
 wobei $B_t := \bigcup_{1 \leq t} {}_1B$, $B_0 := \emptyset$ ist.

(3.10) Hilfssatz:

Für die Bedingungen aus (3.9) gilt:

- α) Die Bedingungen unter I) sind zueinander äquivalent;
 β) " " " II) " " " ;
 γ) " " " III) " " " ;
 δ) " " " IV) " " " ;
 ε) Aus I) folgt III), aus III) dagegen nicht I) .

Beweis:

- α) $g_T = u_T$ m -fast gilt genau dann, wenn für alle $t \in \mathbb{N}$
 auf $\{T = t\}$ m_t -fast $g_t = u_t$ gilt.
 Dies ist gleichbedeutend damit, daß für alle $t \in \mathbb{N}$ auf
 $\{T = t\}$ m_t -fast $g_t \stackrel{E}{\leq} \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{F}_t)$ ist, d.h. damit, daß
 $\{T = t\} \subset {}_tH$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt.

- β), γ) Für zwei Stopzeiten T_1 und T_2 sind stets folgende
 Aussagen äquivalent:

- a) $T_1 \leq T_2$;
 b) $\{T_2 \leq t\} \subset \{T_1 \leq t\}$, $t \in \mathbb{N}$;
 c) $\{T_2 = t\} \subset \{T_1 \leq t\}$, $t \in \mathbb{N}$;
 d) $\{T_1 = t\} \subset \{T_2 \geq t\}$, $t \in \mathbb{N}$.

Angewandt auf T_* und T folgt daraus γ), wobei wir die
 Äquivalenz von a), b) und c) ausnützen.

Angewandt auf T und T^* folgt, wenn wir die Äquivalenz
 von a), b) und d) berücksichtigen, daß II,1'), II,2') und
 II,4') gleichbedeutend sind.

Ferner folgt aus II,2') trivialerweise II,3'), und umgekehrt

ergibt sich aus II,3') m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$:

$$G_t = \bigcup_{1 \leq t} 1G \subset \bigcup_{1 \leq t} \{T \leq 1\} = \{T \leq t\}, \text{ also II,2').}$$

Zu zeigen bleibt damit zu β) noch, daß 5') zu den übrigen Bedingungen unter II) äquivalent ist.

Nun gilt m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$ $tG \subset \{T \leq t\}$ genau dann, wenn $\{T > t\} \subset {}_t\overline{G} = \{g_t \stackrel{E}{\geq} \xi(u_{t+1} | \mathcal{F}_t)\} = \{u_t = \xi(u_{t+1} | \mathcal{F}_t)\}$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt; d.h. II,3') und II,5') sind äquivalent.

δ) Die Äquivalenz von IV,1'') und IV,2'') folgt aus α) und β).

Wir zeigen: I,2) und II,2') impliziert IV,3''):

T erfülle also I,2) und II,2');

wir setzen ${}_tB := \{T = t\} \cup {}_tG$ für alle $t \in \mathbb{N}$;

dann gilt: ${}_tB \in \mathcal{F}_t$ und ${}_tG \subset {}_tB \subset {}_tH$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$, wegen I,2);

sowie: ${}_tB = \{T \leq t\} \cup {}_tG = \{T \leq t\}$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$, wegen II,2');

also: ${}_tB \cap \overline{{}_{t-1}B} = \{T = t\}$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen: IV,3'') impliziert IV,2''):

T erfülle IV,3''), dann gilt:

$$\{T = t\} = {}_tB \cap \overline{{}_{t-1}B} \subset {}_tB \subset {}_tH \text{ } m_t\text{-fast für alle } t \in \mathbb{N}, \text{ und}$$

$$\{T = t\} = {}_tB \cap \overline{{}_{t-1}B} \subset \overline{{}_{t-1}B} \subset \overline{{}_{t-1}G} \text{ } m_t\text{-fast für alle } t \in \mathbb{N};$$

also: $\{T = t\} \subset {}_tH \cap \overline{{}_{t-1}G}$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$.

ϵ) III) folgt selbstverständlich aus I).

Daß die Umkehrung nicht richtig ist, zeigt folgendes einfache Beispiel:

Sei $\Omega := \{a\}$ einpunktig; $\mathcal{F}_t := \mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ für alle $t \in \mathbb{N}$ und $m(\{a\}) := 1$.

Für alle $t \in \mathbb{N}$ mit $t \neq 2$ sei $g_t(a) := t$, es sei $g_2(a) := 4$. Dann ist mit $u_t(a) := t$ für $t \neq 2$, $u_2(a) := 3$, trivialerweise (3.1) erfüllt.

Dabei gilt $t_H = \Omega = \{a\}$ für $t \neq 2$, ${}_2H = \emptyset$, und $H_t = \Omega = \{a\}$ für alle $t \in \mathbb{N}$. Setzen wir $T := 2$, so erfüllt T die Bedingung III,3"), aber nicht I,2).

Wir betrachten jetzt weitere Bedingungen an das Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, unter denen sich aus den bisherigen Aussagen dieses Paragraphen Sätze zur Berechnung und Charakterisierung E-optimaler Stopzeiten ergeben.

(3.11) Voraussetzungen:

- a) Es sei (3.1) erfüllt und es gelte $u_1 \stackrel{E}{\leq} \mathcal{E}(g_T | \mathcal{F}_1)$ m_1 -fast für alle Stopzeiten T der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ mit $\int_{\Omega} g_T dm < \infty$.
- b) Es sei (3.1) erfüllt und es gelte für alle $t \in \mathbb{N}$ $u_t \stackrel{E}{\leq} \mathcal{E}(g_T(t) | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast für alle Stopzeiten $T(t)$ der Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t}$ mit $\int_{\Omega} g_T(t) dm < \infty$.

Die Familie $\mathcal{H}$, die wir für zulässiges $\mathcal{G}$ in § 5 konstruieren werden, wird (3.11,b) und damit auch (3.11,a) erfüllen.

Wir führen in diesem Zusammenhang noch den Begriff des essentiellen E-Infimums, bzw. E-Minimums, ein.

(3.12) Definition:

Zum Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ und zu $J = \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$, oder $J = \mathbb{N}$ sei $\{\varphi_{\gamma} : \gamma \in \Gamma\}$ eine Menge von $\mathcal{F}$ -meßbaren Funktionen $\varphi_{\gamma} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^J$.

Dann heißt eine $\mathcal{F}$ -meßbare Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^J$ das essentielle E-Infimum der Menge $\{\varphi_{\gamma} : \gamma \in \Gamma\}$, wenn gilt:

- a) es ist m -fast $\varphi \stackrel{E}{\leq} \varphi_{\gamma}$ für alle $\gamma \in \Gamma$;
- b) ist $\tilde{\varphi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^J$ $\mathcal{F}$ -meßbar und gilt m -fast $\tilde{\varphi} \stackrel{E}{\leq} \varphi_{\gamma}$ für alle $\gamma \in \Gamma$, so ist m -fast $\tilde{\varphi} \stackrel{E}{\leq} \varphi$.

Wird dabei φ angenommen, d.h. gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\varphi = \varphi_\gamma$ m-fast überall, so nennen wir φ das essentielle E-Minimum der Menge $\{\varphi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

Wir schreiben: $\varphi = \text{ess} - E - \inf \{\varphi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$
bzw.: $\varphi = \text{ess} - E - \min \{\varphi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

Nunmehr können wir folgende Aussagen formulieren:

(3.13) Hilfssatz:

Es gelte (3.11,a). Ferner sei T_0 eine Stopzeit, für die m-fast $g_{T_0} = u_{T_0}$ und $T_0 \leq T^*$ gilt.

Dann ist m₁-fast $u_1 = \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_1)$, und T_0 ist E-optimal zu $\mathcal{G}$.

Beweis:

Nach (3.10,6) wissen wir, daß T_0 sich in der in (3.5) angegebenen Form schreiben läßt. Aus (3.7) erhalten wir dann $\int_{\Omega} u_1 \, d\mu \geq \int_{\Omega} g_{T_0} \, d\mu$, während aus (3.11,a) sich $u_1 \stackrel{E}{\leq} \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_1)$ ergibt.

Insgesamt folgt daraus unter Berücksichtigung von (1.7), daß m₁-fast $u_1 = \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_1)$ gilt. Wiederum wegen (3.11,a) ist daher T_0 E-optimal zu $\mathcal{G}$.

Aus (3.13) folgt der

(3.14) Satz:

Sei (3.11,a) erfüllt. Dann gilt:

- 1) $u_1 = \mathcal{E}(g_{T^*} | \mathcal{F}_1) = \mathcal{E}(g_{T_*} | \mathcal{F}_1)$ m₁-fast ;
- 2) T^* und T_* sind E-optimal zu $\mathcal{G}$;
- 3) $u_1 = \text{ess-E-min} \{ \mathcal{E}(g_T | \mathcal{F}_1) : T \text{ ist Stopzeit der Familie } (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}} \text{ mit } \int_{\Omega} g_T \, d\mu < \infty \}$ m₁-fast;
- 4) $\int_{\Omega} u_1 \, d\mu = E\text{-min} \{ \int_{\Omega} g_T \, d\mu : T \text{ ist Stopzeit der Familie } (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}} \}$;
- 5) Eine Stopzeit T_0 der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ist genau dann E-optimal zu $\mathcal{G}$, wenn $u_1 = \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_1)$ m₁-fast gilt.

Beweis:

Zu zeigen ist allenfalls noch 5):

Ist T_0 E-optimal zu $\mathcal{G}$, so gilt nach 4) $\int_{\Omega} u_1 \, d\mu = \int_{\Omega} g_{T_0} \, d\mu$,
und daraus folgt wegen (3.11,a) und (1.7), daß $u_1 = \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_1)$
 m_1 -fast gilt.

Ist andererseits $u_1 = \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_1)$ m_1 -fast richtig, so gilt
 $\int_{\Omega} u_1 \, d\mu = \int_{\Omega} g_{T_0} \, d\mu$, und aus 4) folgt: T_0 ist E-optimal zu $\mathcal{G}$.

Unter (3.11,b) können wir (3.14,3) noch erweitern:

(3.15) Satz:

Sei (3.11,b) erfüllt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast
 $u_t = \text{ess-E-min} \{ \mathcal{E}(g_T(t) | \mathcal{F}_t) : T^{(t)} \text{ ist Stopzeit der Familie } (\mathcal{F}_j)_{j \geq t} \text{ mit } \int_{\Omega} g_T(t) \, d\mu < \infty \}$.

Beweis:

Wegen (3.11,b) läßt (3.14) sich für jedes $t \in \mathbb{N}$ auf die Indexmenge $\{t, t+1, t+2, \dots\}$ anwenden. (3.14,3) liefert dann die Behauptung.

In der Literatur wird in diesem Zusammenhang manchmal der Begriff der "Snell'schen Enveloppe" verwendet (vgl. [7]). Wir definieren ihn für unseren Fall:

(3.16) Definition:

Bei gegebenem $\mathcal{G} = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}^0$ nennen wir eine Familie $\mathcal{N} = (v_t)_{t \in \mathbb{N}}$ mit

$v_t = \text{ess-E-inf} \{ \mathcal{E}(g_T(t) | \mathcal{F}_t) : T^{(t)} \text{ ist Stopzeit der Familie } (\mathcal{F}_j)_{j \geq t} \text{ mit } \int_{\Omega} g_T(t) \, d\mu < \infty \}$ m_t -fast

die Snell'sche Enveloppe zu $\mathcal{G}$.

Aus (3.15) ergibt sich also die

(3.17) Folgerung:

Unter (3.11,b) ist $\mathcal{N}$ die Snell'sche Enveloppe zu $\mathcal{G}$.

In § 5 werden wir, wie bereits angekündigt, zu jedem zulässigen $\mathcal{Q}$ ein $\mathcal{N}$ erhalten, das (3.11,b) erfüllt; $\mathcal{N}$ wird also die Snell'sche Enveloppe zu $\mathcal{Q}$ sein. Insbesondere wird sich dadurch herausstellen, daß für die Snell'sche Enveloppe zu $\mathcal{Q}$ stets (3.1,a) richtig ist.

Zum Abschluß dieses Paragraphen beweisen wir noch den

(3.18) Satz:

Es sei (3.11,b) erfüllt. Dann gilt:

Eine Stopzeit T_0 der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ist genau dann E-optimal zu $\mathcal{Q}$, wenn m-fast $u_{T_0} = g_{T_0}$ und $T_0 \leq T^*$ gilt.

Weitere äquivalente Bedingungen ergeben sich wegen (3.10,6) aus (3.9,IV).

Beweis:

a) Gilt für T_0 m-fast $u_{T_0} = g_{T_0}$ und $T_0 \leq T^*$, so ist T_0 nach (3.13) E-optimal zu $\mathcal{Q}$.

b) Sei T_0 E-optimal zu $\mathcal{Q}$.

1. Aus (3.15) können wir folgern, daß für alle $t \in \mathbb{N}$ (mindestens) eine Stopzeit $T_0^{(t)}$ der Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t}$ existiert, so daß $u_t = \mathcal{E}(g_{T_0^{(t)}} | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast und $\int_{\Omega} g_{T_0^{(t)}} d\mathbf{m} \stackrel{E}{\leq} \int_{\Omega} g_T d\mathbf{m}$ für alle Stopzeiten $T(t)$ der Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t}$ gilt.

2. Für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt ferner auf $\{T_0 \geq t\}$ wegen (3.11,b): $u_t \stackrel{E}{\leq} \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast.

3. Wir zeigen nun, daß für alle $t \in \mathbb{N}$ auf $\{T_0 \geq t\}$ sogar $u_t = \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast gilt.

Dazu nehmen wir an, es gebe ein $t_0 \in \mathbb{N}$, so daß bei $Y_{t_0} := \{T_0 \geq t_0\} \cap \{u_{t_0} \stackrel{E}{\neq} \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_{t_0})\} \in \mathcal{F}_{t_0}$ gilt: $m(Y_{t_0}) > 0$.

Dann setzen wir: $\tilde{T}_0 := T_0 \cdot \chi_{Y_{t_0}^c} + T_0^{(t_0)} \cdot \chi_{Y_{t_0}}$ mit $T_0^{(t_0)}$ gemäß 1.

Es gilt $m(\{\tilde{T}_0 < \infty\}) = 1$. Ferner ergibt sich für $t < t_0$ wegen $\{T_0 < t_0\} = \{\overline{T_0 \geq t_0}\} \subset \bar{Y}_{t_0}$, daß $\{\tilde{T}_0 = t\} = \{T_0 = t\} \cap \bar{Y}_{t_0} = \{T_0 = t\}$ ist, während für $t \geq t_0$ gilt: $\{\tilde{T}_0 = t\} = (\{T_0 = t\} \cap \bar{Y}_{t_0}) \cup (\{T_0^{(t_0)} = t\} \cap Y_{t_0})$.

Insbesondere ist also für alle $t \in \mathbb{N}$ $\{\tilde{T}_0 = t\} \in \mathcal{F}_t$, womit wir gezeigt haben, daß $\tilde{T}_0$ Stopzeit ist.

Schließlich gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g_{\tilde{T}_0} dm &= \int_{\bar{Y}_{t_0}} g_{T_0} dm + \int_{Y_{t_0}} g_{T_0}(t_0) dm = \\ &= \int_{\bar{Y}_{t_0}} g_{T_0} dm + \int_{Y_{t_0}} \mathcal{E}(g_{T_0}(t_0) | \mathcal{F}_{t_0}) dm = \\ &= \int_{\bar{Y}_{t_0}} g_{T_0} dm + \int_{Y_{t_0}} u_{t_0} dm \stackrel{E}{\leq} \\ &\stackrel{E}{\leq} \int_{\bar{Y}_{t_0}} g_{T_0} dm + \int_{Y_{t_0}} \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_{t_0}) dm = \int_{\Omega} g_{T_0} dm, \end{aligned}$$

was der E-Optimalität von T_0 widerspricht.

Damit ist 3. bewiesen.

4. Aus 3. folgt:

- a) Auf $\{T_0 = t\}$ ist $u_t = \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_t) = g_t$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.
- β) Auf $\{T_0 \geq t+1\} = \{T_0 > t\}$ gilt wegen $\{T_0 > t\} \in \mathcal{F}_t$ sowohl $u_t = \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$, als auch $u_{t+1} = \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_{t+1})$ m_{t+1} -fast, $t \in \mathbb{N}$.

5. Aus 4.a) erhalten wir m -fast $u_{T_0} = g_{T_0}$.

Wegen 4.β) ergibt sich ferner für alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast auf $\{T_0 > t\}$:

$$u_t = \mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_t) = \mathcal{E}(\mathcal{E}(g_{T_0} | \mathcal{F}_{t+1}) | \mathcal{F}_t) = \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{F}_t)$$

Folglich erfüllt T_0 die Bedingung II,5') von (3.9), und (3.10,β) liefert dann die Aussage: $T_0 \leq T^*$ m -fast.

Zu den in diesem Paragraphen bewiesenen Aussagen vergleiche man in [5] die Sätze (5.10) bis (5.16).

§ 4 Konstruktion von Hilfsfunktionen

Wir haben in § 3 mehrmals darauf hingewiesen, daß es unser Ziel ist, für zulässiges $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_J$ ein $\mathcal{N}$ zu konstruieren, so daß das Paar $(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$ der Voraussetzung (3.1) und dann auch der Bedingung (3.11,b) genügt.

Der Vorbereitung hierzu dienen die Aussagen dieses Paragraphen. Dabei sei stets (2.1) erfüllt, und wir gehen aus von folgender

(4.1) Voraussetzung:

- a) $\mathcal{K} = (\mathbf{t}^K)_{t \in \mathbb{N}}$ und $\mathcal{L} = (\mathbf{t}^L)_{t \in \mathbb{N}}$ seien Familien von Elementen $\mathbf{t}^K, \mathbf{t}^L \in \mathcal{S}_t$ mit $\mathbf{t}^K \subset \mathbf{t}^L$ für alle $t \in \mathbb{N}$.
Dabei sei für alle $t \in \mathbb{N}$ $m(\bigcup_{j \geq t} \mathbf{j}^L) = 1$.
- b) Es sei $\mathcal{Q} = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_0$ und $\mathcal{f} = (f_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{Q})$.
(vgl. (2.5,a) und (2.14,a)).

Beispiele für Familien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ gemäß (4.1,a) werden wir in diesem und im folgenden Paragraphen kennenlernen.

Wir definieren nun:

(4.2. Definition:

Sei (4.1) erfüllt.

Dann heißt eine Folge $(T^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$ von Stopzeiten $T^{(t)}$ der Familie $(\mathcal{S}_j)_{j \geq t}$ verträglich mit $(\mathcal{Q}, \mathcal{f}; \mathcal{K}, \mathcal{L})$, wenn gilt:

- a) $\{T^{(t)} = j\} \subset \mathbf{j}^L$ m_j -fast für alle $j \geq t$, $t \in \mathbb{N}$;
b) $\mathbf{j}^K \subset \{T^{(t)} \leq j\}$ m_j -fast für alle $j \geq t$, $t \in \mathbb{N}$;
c) auf $\{T^{(t)} > t\}$ ist m -fast $T^{(t)} = T^{(t+1)}$, $t \in \mathbb{N}$;
d) $\int_{\Omega} g_{T^{(t)}}(t) \, dm < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}$;
e) $E(f_t | \mathcal{S}_t) \leq E(g_{T^{(t)}}(t) | \mathcal{S}_t)$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$.

Wie wir aus (2.6) wissen, ist $\int_{\Omega} g_{T^{(t)}}(t) \, dm > -\infty$, also existiert der in e) gebildete bedingte Erwartungswert $E(g_{T^{(t)}}(t) | \mathcal{S}_t)$ wegen d) für alle $t \in \mathbb{N}$.

Wir machen uns nun klar, daß unter (4.1) Folgen $(T^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$ von Stopzeiten $T^{(t)} \geq t$ existieren, die a), b) und c) von (4.2) erfüllen.

(4.3) Bemerkung:

Sei (4.1) erfüllt. Dann gilt:

- a) Ist $\mathcal{X} = ({}_t C)_{t \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Elementen ${}_t C \in \mathcal{F}_t$ mit ${}_t K \subset {}_t C \subset {}_t L$ und $m(\bigcup_{j \geq t} {}_j C) = 1$ für alle $t \in \mathbb{N}$, und setzen wir für alle $t \in \mathbb{N}$

$$C_j^t := \bigcup_{t \leq l \leq j} {}_l C \quad \text{für alle } j \geq t, \quad C_{t-1}^t := \emptyset,$$

$$\text{ sowie } T_0^{(t)}(\omega) := \begin{cases} j, & \text{falls } \omega \in C_j^t \cap \overline{C_{j-1}^t}, \quad j \geq t, \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

so erfüllt die Folge $(T_0^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$ a), b) und c) von (4.2).

- b) Existiert eine mit $(\mathcal{G}, \mathcal{F}; \mathcal{R}, \mathcal{L})$ verträgliche Folge $(T_0^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$, und ist ferner $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{G})$ (vgl. (2.14, b)), $t_0 \in \mathbb{N}$ und $T^{(t_0)}$ eine Stopzeit der Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t_0}$ mit

$$1) \{T^{(t_0)} = j\} \subset {}_j L \quad m_j\text{-fast für alle } j \geq t_0$$

$$2) {}_j K \subset \{T^{(t_0)} \leq j\} \quad m_j\text{-fast für alle } j \geq t_0$$

$$3) \int_{\Omega} g_T(t_0) \, d\mu < \infty,$$

so existiert eine mit $(\mathcal{G}, \mathcal{F}; \tilde{\mathcal{R}}, \mathcal{L})$ verträgliche Folge $(\tilde{T}^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$ mit $\tilde{T}^{(t_0)} = T^{(t_0)}$.

Beweis:

- a) $T_0^{(t)}$ ist Stopzeit der Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t}$, denn es ist

$$m(\{T_0^{(t)} < \infty\}) = m(\bigcup_{j \geq t} C_j^t) = m(\bigcup_{j \geq t} {}_j C) = 1, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Dabei gilt für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $j \geq t$:

$$\{T_0^{(t)} = j\} = C_j^t \cap \overline{C_{j-1}^t} = {}_j C \cap \overline{C_{j-1}^t}.$$

Daraus folgt:

i) $\{T_0^{(t)} = j\} \subset {}_jC \subset {}_jL$ für alle $j \geq t$, $t \in \mathbb{N}$, vgl. (4.2,a)

ii) ${}_jK \subset {}_jC \subset C_j^t = \{T_0^{(t)} \leq j\}$ für alle $j \geq t$, $t \in \mathbb{N}$, vgl. (4.2,b).

Ferner ist für alle $j \geq t+1$, $t \in \mathbb{N}$, $C_{j-1}^{t+1} \subset C_{j-1}^t$,

also $\overline{C_{j-1}^t} \subset \overline{C_{j-1}^{t+1}}$, so daß gilt:

iii) $\{T_0^{(t)} = j\} = {}_jC \cap \overline{C_{j-1}^t} \subset {}_jC \cap \overline{C_{j-1}^{t+1}} = \{T_0^{(t+1)} = j\}$

für alle $j \geq t+1$, $t \in \mathbb{N}$,

d.h. auf $\{T_0^{(t)} > t\}$ ist $T_0^{(t)} = T_0^{(t+1)}$, $t \in \mathbb{N}$, vgl. (4.2,c)

b) Wir definieren:

$$\tilde{T}(t) := \begin{cases} T_0^{(t)}, & \text{wo } T_0^{(t)} < t_0 \\ T(t_0), & \text{wo } T_0^{(t)} \geq t_0 \end{cases} \quad \text{für } t < t_0$$

$$\tilde{T}(t) := \begin{cases} T(t_0), & \text{wo } T(t_0) \geq t \\ T_0^{(t)}, & \text{wo } T(t_0) < t \end{cases} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Dann gilt:

α) Für alle $t \in \mathbb{N}$ ist $\tilde{T}(t)$ auf ganz Ω definiert mit $\tilde{T}(t) \geq t$ und mit $m(\{\tilde{T}(t) < \infty\}) = 1$; ferner ist $\tilde{T}(t_0) = T(t_0)$.

β) Ist $t < t_0$, so gilt für alle $j \geq t$: $\{\tilde{T}^{(t)} = j\} = (\{T_0^{(t)} = j\} \cap \{T_0^{(t)} < t_0\}) \cup (\{T(t_0) = j\} \cap \{T_0^{(t)} \geq t_0\})$.

γ) Ist $t \geq t_0$, so gilt für alle $j \geq t$: $\{\tilde{T}^{(t)} = j\} = (\{T(t_0) = j\} \cap \{T(t_0) \geq t\}) \cup (\{T_0^{(t)} = j\} \cap \{T(t_0) < t\})$.

δ) Aus $t \leq j < t_0$ folgt $\{\tilde{T}^{(t)} = j\} = \{T_0^{(t)} = j\}$ wegen β);

aus $t < t_0 \leq j$ folgt $\{\tilde{T}^{(t)} = j\} = \{T(t_0) = j\} \cap \{T_0^{(t)} \geq t_0\}$ wegen β);

aus $t_0 \leq t \leq j$ folgt $\{\tilde{T}^{(t)} = j\} = \{T(t_0) = j\} \cup (\{T_0^{(t)} = j\} \cap \{T(t_0) < t\})$ wegen γ).

Aus δ) folgt zunächst: für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $j \geq t$
 ist $\{\tilde{T}^{(t)} = j\} \in \mathcal{F}_j$;
 wegen α) ist also $\tilde{T}^{(t)}$ Stopzeit der Familie
 $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t}$, $t \in \mathbb{N}$.

Ferner gilt:

i) Da $(T_0^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$ (4.2,a) erfüllt, und wegen Eigenschaft 1)
 von $T^{(t_0)}$ ergibt sich aus δ) für alle $t \in \mathbb{N}$, $j \geq t$:
 $\{\tilde{T}^{(t)} = j\} \subset {}_jL$ m_j -fast;
 also gilt (4.2,a) für $(\tilde{T}^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$.

ii) Wegen Eigenschaft 2) von $T^{(t_0)}$, und weil $(T_0^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$
 (4.2,b) erfüllt, erhalten wir:

Für $t < t_0$, $j \geq t$, folgt aus β):

$$\begin{aligned} {}_jK &= ({}_jK \cap \{T_0^{(t)} < t_0\}) \cup ({}_jK \cap \{T_0^{(t)} \geq t_0\}) \subset \\ &\subset (\{T_0^{(t)} \leq j\} \cap \{T_0^{(t)} < t_0\}) \cup (\{T^{(t_0)} \leq j\} \cap \{T_0^{(t)} \geq t_0\}) = \\ &= \{\tilde{T}^{(t)} \leq j\} \quad m_j\text{-fast.} \end{aligned}$$

Für $t \geq t_0$, $j \geq t$, folgt aus γ):

$$\begin{aligned} {}_jK &= ({}_jK \cap \{T^{(t_0)} \geq t\}) \cup ({}_jK \cap \{T^{(t_0)} < t\}) \subset \\ &\subset (\{T^{(t_0)} \leq j\} \cap \{T^{(t_0)} \geq t\}) \cup (\{T_0^{(t)} \leq j\} \cap \{T^{(t_0)} < t\}) = \\ &= \{\tilde{T}^{(t)} \leq j\} \quad m_j\text{-fast.} \end{aligned}$$

Also gilt (4.2,b) für $(\tilde{T}^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$.

iii) Wir nützen aus, daß $(T_0^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$ (4.2,c) erfüllt,
 und erhalten wegen δ):

$$\begin{aligned} \text{Ist } t < j < t_0, \text{ so ist } t+1 \leq j < t_0, \text{ und es ergibt} \\ \text{sich } m_j\text{-fast } \{\tilde{T}^{(t)} = j\} &= \{T_0^{(t)} = j\} \subset \{T_0^{(t+1)} = j\} = \\ &= \{\tilde{T}^{(t+1)} = j\}. \end{aligned}$$

Ist $t < t_0 \leq j$, so ist $t+1 \leq t_0 \leq j$.

1. Fall: $t + 1 < t_0 \leq j$; dann gilt m_j -fast:

$$\begin{aligned} \{\tilde{T}^{(t)} = j\} &= \{T^{(t_0)} = j\} \cap \{T_0^{(t)} \geq t_0\} \subset \\ &\subset \{T^{(t_0)} = j\} \cap \{T_0^{(t+1)} \geq t_0\} = \{\tilde{T}^{(t+1)} = j\} . \end{aligned}$$

2. Fall: $t + 1 = t_0 \leq j$; dann gilt:

$$\begin{aligned} \{\tilde{T}^{(t)} = j\} &= \{T^{(t_0)} = j\} \cap \{T_0^{(t)} \geq t_0\} \subset \{T^{(t_0)} = j\} = \\ &= \{\tilde{T}^{(t_0)} = j\} = \{\tilde{T}^{(t+1)} = j\} . \end{aligned}$$

Ist $t_0 \leq t < j$, so ist $t_0 < t + 1 \leq j$, und es ergibt sich m_j -fast $\{\tilde{T}^{(t)} = j\} = \{T^{(t_0)} = j\} \cup (\{T_0^{(t)} = j\} \cap \{T^{(t_0)} < t\}) \subset \{T^{(t_0)} = j\} \cup (\{T_0^{(t+1)} = j\} \cap \{T^{(t_0)} < t\}) = \{\tilde{T}^{(t+1)} = j\} .$

Also ist für $(\tilde{T}^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$ (4.2,c) erfüllt.

iv) $\int_{\Omega} g_{\tilde{T}}(t) \, dm < \infty$ folgt aus

$$\int_{\Omega} g_{T_0}(t) \, dm < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} g_T(t_0) \, dm < \infty , \quad t \in \mathbb{N} ;$$

damit ist (4.2,d) für $(\tilde{T}^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$ nachgewiesen.

v) Wegen $\phi \in \mathcal{M}_2(\mathcal{G})$ ist klar, daß $(\tilde{T}^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$ der Bedingung (4.2,e) genügt.

Nun definieren wir:

(4.4) Definition:

Sei Voraussetzung von (4.1) erfüllt. Dann setzen wir für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $t < k$:

$$\begin{aligned} k_{\phi_k}(\mathcal{G}, \phi; \mathcal{K}, \mathcal{L})(\omega) &:= \begin{cases} g_k(\omega) & \text{für } \omega \in {}_k K \\ \mathcal{E}(f_k | \mathcal{F}_k)(\omega) & \text{für } \omega \in {}_k \bar{K} \end{cases} \\ k_{\phi_t}(\mathcal{G}, \phi; \mathcal{K}, \mathcal{L})(\omega) &:= \begin{cases} g_t(\omega) & \text{für } \omega \in {}_t K \\ \min(g_t(\omega), \mathcal{E}({}^k_{\phi_{t+1}}(\mathcal{G}, \phi; \mathcal{K}, \mathcal{L}) | \mathcal{F}_t)(\omega)) & \text{für } \omega \in {}_t L \cap {}_t \bar{K} \\ \mathcal{E}({}^k_{\phi_{t+1}}(\mathcal{G}, \phi; \mathcal{K}, \mathcal{L}) | \mathcal{F}_t)(\omega) & \text{für } \omega \in {}_t \bar{L} \end{cases} \end{aligned}$$

Da wir uns im folgenden $\mathcal{G}$ sowie $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ fest gewählt denken, schreiben wir $k_{\varphi_t}(\mathcal{f})$ statt $k_{\varphi_t}(\mathcal{G}, \mathcal{f}; \mathcal{K}, \mathcal{L})$, $t \in \mathbb{N}$, $k \geq t$.

In einigen Hilfssätzen werden wir nun diese Funktionen $k_{\varphi_t}(\mathcal{f})$ genauer untersuchen:

(4.5) Hilfssatz:

Sei (4.1) erfüllt und sei neben $\mathcal{f}$ auch $\mathcal{f} = (h_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $t \leq k$:

- a) $k_{\varphi_t}(\mathcal{f}) = k_{\varphi_t}(\mathcal{E}(\mathcal{f}))$ m_t -fast ;
- b) aus $\mathcal{f} \stackrel{(m)}{\leq} \mathcal{g}$ folgt $k_{\varphi_t}(\mathcal{f}) \leq k_{\varphi_t}(\mathcal{g})$ m_t -fast .

Beweis:

a) ist klar nach Definition (4.4).

b) Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach $j := k - t$, $t \in \mathbb{N}$.

$j = 0$: $t_{\varphi_t}(\mathcal{f}) \leq t_{\varphi_t}(\mathcal{f})$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$, folgt aus $\mathcal{f} \stackrel{(m)}{\leq} \mathcal{f}$.

$j-1 \rightarrow j$: Induktionsvoraussetzung: $t+j-1_{\varphi_t}(\mathcal{f}) \leq t+j-1_{\varphi_t}(\mathcal{g})$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$; also gilt auch $k_{\varphi_{t+1}}(\mathcal{f}) \leq k_{\varphi_{t+1}}(\mathcal{g})$ m_{t+1} -fast, $t \in \mathbb{N}$.

Daraus folgt: $\mathcal{E}(k_{\varphi_{t+1}}(\mathcal{f}) | \mathcal{F}_t) \leq \mathcal{E}(k_{\varphi_{t+1}}(\mathcal{g}) | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$,
und somit $k_{\varphi_t}(\mathcal{f}) \leq k_{\varphi_t}(\mathcal{g})$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

(4.6) Hilfssatz:

Sei (4.1) erfüllt. Dann gilt m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $k \geq t$: $k_{\varphi_t}(\mathcal{f}) \leq k_{\varphi_t}(\mathcal{f})$.

Beweis:

Wieder führen wir eine Induktion nach $j := k - t$, $t \in \mathbb{N}$, durch. Wir setzen $\mathcal{f} \in \mathcal{M}$ voraus, was wegen (4.5, a) o.B.d.A. möglich ist.

$j = 0$: 1) auf ${}_t K$ gilt ${}^t \varphi_t(\mathcal{A}) = {}^{t+1} \varphi_t(\mathcal{A}) = g_t$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

2) Wegen $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$ wissen wir:

$\alpha)$ $f_t \leq g_t$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$;

$\beta)$ $f_t \leq \mathcal{E}(f_{t+1} | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

Aus $\alpha)$ folgt nach Definition (4.4):

$\gamma)$ ${}^t \varphi_t(\mathcal{A}) \geq f_t$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

Daraus ergibt sich wegen $\beta)$:

$\delta)$ $\mathcal{E}({}^{t+1} \varphi_{t+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_t) \geq \mathcal{E}(f_{t+1} | \mathcal{F}_t) \geq f_t$
 m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

Damit gilt wegen $\alpha)$ und $\delta)$:

$\epsilon)$ $\min(g_t, \mathcal{E}({}^{t+1} \varphi_{t+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_t)) \geq f_t$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

Auf ${}_t \bar{K}$ gilt folglich wegen $\delta)$ und $\epsilon)$:

${}^t \varphi_t(\mathcal{A}) = f_t \leq {}^{t+1} \varphi_t(\mathcal{A})$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

$j-1 \rightarrow j$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt:

${}^{t+j-1} \varphi_t(\mathcal{A}) \leq {}^{t+j} \varphi_t(\mathcal{A})$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$;

also auch ${}^k \varphi_{t+1}(\mathcal{A}) \leq {}^{k+1} \varphi_{t+1}(\mathcal{A})$ m_{t+1} -fast, $t \in \mathbb{N}$.

Daraus folgt: ${}^k \varphi_t(\mathcal{A}) \leq {}^{k+1} \varphi_t(\mathcal{A})$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$;

denn:

1) auf ${}_t K$ ist ${}^k \varphi_t(\mathcal{A}) = {}^{k+1} \varphi_t(\mathcal{A}) = g_t$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

2) auf ${}_t \bar{L} \cap {}_t \bar{K}$ ist ${}^k \varphi_t(\mathcal{A}) = \min(g_t, \mathcal{E}({}^k \varphi_{t+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_t)) \leq$
 $\leq \min(g_t, \mathcal{E}({}^{k+1} \varphi_{t+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_t)) = {}^{k+1} \varphi_t(\mathcal{A})$
 m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

3) auf ${}_t \bar{L}$ ist ${}^k \varphi_t(\mathcal{A}) = \mathcal{E}({}^k \varphi_{t+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_t) \leq$
 $\leq \mathcal{E}({}^{k+1} \varphi_{t+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_t) = {}^{k+1} \varphi_t(\mathcal{A})$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

(4.7) Hilfssatz:

Sei (4.1) erfüllt. Es existiere eine mit $(\mathcal{G}, \mathcal{f}; \mathcal{K}, \mathcal{L})$ verträgliche Folge $(T_0^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$. Dann gilt:

- a) Für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $k \geq t$ ist ${}^k_{\varphi_t}(\mathcal{f}) \leq \mathcal{E}(g_{T_0}(t) | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast.
- b) Ist $\mathcal{f} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{G})$, $t_0 \in \mathbb{N}$ und $T^{(t_0)}$ eine Stopzeit der Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t_0}$, die 1), 2) und 3) von (4.3, b) erfüllt, so ist für alle $k \geq t_0$ ${}^k_{\varphi_{t_0}}(\mathcal{f}) \leq \mathcal{E}(g_{T_0}(t_0) | \mathcal{F}_{t_0})$ m_{t_0} -fast.

Beweis:

- a) Wir beweisen die Aussage für alle $t \in \mathbb{N}$ wieder durch Induktion nach $j := k - t$, wobei wir auch hier wegen (4.5, a)

$\mathcal{f} \in \mathcal{M}$ voraussetzen.

$j = 0$: 1) Wegen ${}_t K \subset \{T_0^{(t)} \leq t\} = \{T_0^{(t)} = t\}$ m_t -fast gilt auf ${}_t K$: ${}^t_{\varphi_t}(\mathcal{f}) = g_t = \mathcal{E}(g_{T_0}(t) | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$;

2) auf ${}_t \bar{K}$ ist ${}^t_{\varphi_t}(\mathcal{f}) = f_t \leq \mathcal{E}(g_{T_0}(t) | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$, wegen (4.2, e).

$j-1 \rightarrow j$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$: ${}^{t+j-1}_{\varphi_t}(\mathcal{f}) \leq \mathcal{E}(g_{T_0}(t) | \mathcal{F}_t)$, also gilt auch ${}^k_{\varphi_{t+1}}(\mathcal{f}) \leq \mathcal{E}(g_{T_0}(t+1) | \mathcal{F}_{t+1})$ m_{t+1} -fast für alle $t \in \mathbb{N}$.

Daraus folgt ${}^k_{\varphi_t}(\mathcal{f}) \leq \mathcal{E}(g_{T_0}(t) | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$;

denn:

1) α) Nach (4.2,a) ist $\{T_o^{(t)} = t\} \subset {}_tL$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

β) Nach (4.4) gilt $k_{\varphi_t}(\mathcal{F}) \leq g_t$ m_t -fast auf ${}_tL$,
 $t \in \mathbb{N}$.

Folglich gilt auf $\{T_o^{(t)} = t\}$ m_t -fast

$$k_{\varphi_t}(\mathcal{F}) \leq g_t = \mathcal{E}(g_{T_o}(t) | \mathcal{F}_t), \quad t \in \mathbb{N}.$$

2) α) Nach (4.2,b) ist ${}_tK \subset \{T_o^{(t)} = t\}$, bzw.

$$\{T_o^{(t)} > t\} \subset {}_t\bar{K} \quad m_t\text{-fast}, \quad t \in \mathbb{N}.$$

β) Nach (4.4) gilt $k_{\varphi_t}(\mathcal{F}) \leq \mathcal{E}(k_{\varphi_{t+1}}(\mathcal{F}) | \mathcal{F}_t)$
 m_t -fast auf ${}_t\bar{K}$, $t \in \mathbb{N}$.

γ) Nach (4.2,c) gilt auf $\{T_o^{(t)} > t\}$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{E}(g_{T_o}(t) | \mathcal{F}_t) = \mathcal{E}(g_{T_o}(t+1) | \mathcal{F}_t).$$

Folglich gilt auf $\{T_o^{(t)} > t\}$ m_t -fast

$$\begin{aligned} k_{\varphi_t}(\mathcal{F}) &\leq \mathcal{E}(k_{\varphi_{t+1}}(\mathcal{F}) | \mathcal{F}_t) \leq \mathcal{E}(g_{T_o}(t+1) | \mathcal{F}_t) = \\ &= \mathcal{E}(g_{T_o}(t) | \mathcal{F}_t), \quad t \in \mathbb{N}, \text{ wobei wir die Induktions-} \\ &\text{voraussetzung ausnützen.} \end{aligned}$$

b) folgt aus a) wegen (4.3,b).

(4.8) Hilfssatz:

Sei (4.1) erfüllt, und es existiere eine mit $(g, \mathcal{F}; \mathcal{K}, \mathcal{L})$ verträgliche Folge $(T_o^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast:

a) Es existiert $\varphi_t(\mathcal{F}) := \lim_{k \rightarrow \infty} k_{\varphi_t}(\mathcal{F})$

b) $\varphi_t(\mathcal{F}) \leq \mathcal{E}(g_{T_o}(t) | \mathcal{F}_t)$

c) $\int_{\Omega} \varphi_t(\mathcal{F}) \, dm = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} k_{\varphi_t}(\mathcal{F}) \, dm \leq \int_{\Omega} g_{T_o}(t) \, dm < \infty$

d) $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}(k_{\varphi_{t+1}}(\mathcal{F}) | \mathcal{F}_t) = \mathcal{E}(\varphi_{t+1}(\mathcal{F}) | \mathcal{F}_t)$

- e) $\varphi_t(\mathcal{f}) = \begin{cases} g_t & \text{auf } {}_tK \\ \min(g_t, \mathcal{E}(\varphi_{t+1}(\mathcal{f}) | \mathcal{F}_t)) & \text{auf } {}_tL \cap {}_t\bar{K} \\ \mathcal{E}(\varphi_{t+1}(\mathcal{f}) | \mathcal{F}_t) & \text{auf } {}_t\bar{L} \end{cases}$
- f) Ist $\mathcal{f} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{G})$ und $T^{(t)}$ eine Stopzeit der Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t}$ mit $\{T^{(t)} = j\} \subset {}_jL$ und ${}_jK \subset \{T^{(t)} \leq j\}$ m_j -fast, $j \geq t$, sowie mit $\int_{\Omega} g_{T(t)} dm < \infty$, so ist $\varphi_t(\mathcal{f}) \leq \mathcal{E}(g_{T(t)} | \mathcal{F}_t)$.

Beweis:

- a) folgt aus (4.6) und (4.7,a);
- b) ergibt sich aus (4.7,a);
- c) erhalten wir wegen (4.2,d), (4.6) und (4.7,a) aus dem Satz von der monotonen, integralbeschränkten Konvergenz;
- d) folgt ebenfalls aus dem Satz von der monotonen, integralbeschränkten Konvergenz, nun angewandt auf bedingte Erwartungswerte;
- e) wegen $\varphi_t(\mathcal{f}) = \lim_{k \rightarrow \infty} {}^k\varphi_t(\mathcal{f})$ m_t -fast gilt (jeweils m_t -fast):
- $$\begin{aligned} \varphi_t(\mathcal{f}) &= g_t \text{ auf } {}_tK \\ \varphi_t(\mathcal{f}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\min(g_t, \mathcal{E}({}^k\varphi_{t+1}(\mathcal{f}) | \mathcal{F}_t))) = \\ &= \min(g_t, \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}({}^k\varphi_{t+1}(\mathcal{f}) | \mathcal{F}_t)) = \\ &= \min(g_t, \mathcal{E}(\varphi_{t+1}(\mathcal{f}) | \mathcal{F}_t)) \text{ auf } {}_tL \cap {}_t\bar{K} \\ &\text{wegen d)} \\ \varphi_t(\mathcal{f}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}({}^k\varphi_{t+1}(\mathcal{f}) | \mathcal{F}_t) = \mathcal{E}(\varphi_{t+1}(\mathcal{f}) | \mathcal{F}_t) \text{ auf } {}_t\bar{L} \\ &\text{wegen d)}. \end{aligned}$$
- f) folgt aus (4.7,b).

(4.9) Hilfssatz:

Seien die Voraussetzungen von (4.8) erfüllt.

Mit $\varphi_t(f)$ gemäß (4.8,a) setzen wir $\varphi(f) := (\varphi_t(f))_{t \in \mathbb{N}}$.

Dann gilt:

- a) $\varphi(f) \stackrel{(m)}{=} \varphi(\mathcal{E}(f))$
- b) $\mathcal{E}(f) \stackrel{(m)}{\leq} \varphi(f)$
- c) $\varphi(f) \in \mathcal{M}_0$
- d) Ist $f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$ mit $f \stackrel{(m)}{\leq} g$, so ist $\varphi(f) \stackrel{(m)}{\leq} \varphi(g)$.

Beweis:

a) folgt aus (4.5,a)

b) Es gilt m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$ nach (4.4), (4.6) und (4.8,a):

$$\mathcal{E}(f_t | \mathcal{F}_t) \leq {}^t \varphi_t(f) \leq {}^{t+1} \varphi_t(f) \leq \dots \leq \varphi_t(f),$$

also ist $\mathcal{E}(f) \stackrel{(m)}{\leq} \varphi(f)$.

c) folgt aus b), da $\mathcal{E}(f) \in \mathcal{M}_0$ ist.

d) ergibt sich aus (4.5,b).

Im weiteren Verlauf dieses Paragraphen wollen wir einen wichtigen Spezialfall von (4.4) behandeln. Dazu setzen wir voraus:

(4.10) Voraussetzung:

Die Familie $\mathcal{G} = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_0$ sei fest gewählt.

Dann setzen wir:

(4.11) Definition:

Unter Voraussetzung (4.10) sei für alle $k \in \mathbb{N}$, für alle $t < k$ und für alle $f = (f_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G}) \cup \{\mathcal{G}\}$:

$$k_{\psi_k}(\mathcal{f})(\omega) := E(f_k | \mathcal{F}_k)(\omega)$$

$$k_{\psi_t}(\mathcal{f})(\omega) := \min(g_t(\omega), E(k_{\psi_{t+1}}(\mathcal{f}) | \mathcal{F}_t)(\omega)) .$$

Daß diese Definition für $\mathcal{f} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$ tatsächlich einen Spezialfall von (4.4) angibt, zeigt die ohne weiteres klare

(4.12) Bemerkung:

Sei (4.10) erfüllt und sei $\mathcal{f} = (f_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$.

Für alle $t \in \mathbb{N}$ setzen wir $t^K := \emptyset$, $t^L := \Omega$;

$$\mathcal{K} := (t^K)_{t \in \mathbb{N}}, \quad \mathcal{L} := (t^L)_{t \in \mathbb{N}} .$$

Dann gilt:

a) Es ist (4.1) erfüllt.

b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $t \leq k$ gilt m_t -fast

$$k_{\psi_t}(\mathcal{G}, \mathcal{f}; \mathcal{K}, \mathcal{L}) = k_{\psi_t}(\mathcal{f}) .$$

c) Es existiert eine mit $(\mathcal{G}, \mathcal{f}; \mathcal{K}, \mathcal{L})$ verträgliche Folge

$$(T_0^{(t)})_{t \in \mathbb{N}}, \text{ etwa } T_0^{(t)} := t, t \in \mathbb{N} .$$

d) Für alle $t \in \mathbb{N}$ und für jede Stopzeit $T^{(t)}$ der

Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t}$ gilt trivialerweise $\{T^{(t)} = j\} \subset j^L$
und $j^K \subset \{T^{(t)} \leq j\}$ für alle $j \geq t$.

Damit können wir die wichtigsten Eigenschaften der Funktionen

$k_{\psi_t}(\mathcal{f})$ für $\mathcal{f} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$ angeben.

(4.13) Hilfssatz:

Unter der Voraussetzung (4.10) gilt für alle $\mathcal{f} = (f_t)_{t \in \mathbb{N}}$

und $\mathcal{f} = (h_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$:

- a) $\mathcal{E}(f_t | \mathcal{F}_t) = {}^t\psi_t(f) \leq {}^{t+1}\psi_t(f) \leq \dots \leq \psi_t(f) := \lim_{k \rightarrow \infty} {}^k\psi_t(f) \leq g_t$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$, wobei $\psi_t(f)$ stets existiert.
- b) $\psi_t(f) = \min(g_t, \mathcal{E}(\psi_{t+1}(f) | \mathcal{F}_t))$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.
- c) $\psi(f) := (\psi_t(f))_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_3(\mathcal{G})$ mit $\mathcal{E}(f) \stackrel{(m)}{\leq} \psi(f) \stackrel{(m)}{\leq} g$
- d) Ist $f \stackrel{(m)}{\leq} g$, so ist $\psi(f) \stackrel{(m)}{\leq} \psi(g)$
- e) Ist $f \in \mathcal{M}_2(\mathcal{G})$, so ist auch $\psi(f) \in \mathcal{M}_2(\mathcal{G})$.

Beweis:

Die Aussagen folgen wegen (4.12) aus (4.6), (4.7), (4.8) und (4.9); dabei beachte man zum Beweis von e) vor allem (4.12,d) und (4.8,f).

Wegen (4.13,c) wissen wir nun insbesondere, daß bei $g \in \mathcal{M}_0$ die Menge $\mathcal{M}_3(\mathcal{G})$ nicht leer ist. Wegen $\mathcal{M}_3(\mathcal{G}) \subset \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$ haben wir damit auch weitere Elemente aus $\mathcal{M}_1(\mathcal{G})$ erhalten.

Wir behandeln jetzt die Funktionen ${}^k\psi_t(\mathcal{G})$.

(4.14) Hilfssatz:

Sei Voraussetzung (4.10) erfüllt. Dann gilt m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$:

- a) ${}^k\psi_t(\mathcal{G}) \geq {}^{k+1}\psi_t(\mathcal{G})$ für alle $k \geq t$.
- b) Ist $f = (f_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$, so ist für alle $k \geq t$ ${}^k\psi_t(\mathcal{G}) \geq \mathcal{E}(f_t | \mathcal{F}_t)$.
- c) Es existiert $\psi_t(\mathcal{G}) := \lim_{k \rightarrow \infty} {}^k\psi_t(\mathcal{G})$.
- d) $\int_{\Omega} \psi_t(\mathcal{G}) \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} {}^k\psi_t(\mathcal{G}) \, d\mu$.
- e) $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}({}^k\psi_{t+1}(\mathcal{G}) | \mathcal{F}_t) = \mathcal{E}(\psi_{t+1}(\mathcal{G}) | \mathcal{F}_t)$.
- f) $\psi_t(\mathcal{G}) = \min(g_t, \mathcal{E}(\psi_{t+1}(\mathcal{G}) | \mathcal{F}_t))$.

Beweis:

a) Induktion nach $j := k - t$, $t \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} j = 0: \quad t_{\psi_t}(\mathcal{G}) &= g_t \geq \min(g_t, \mathcal{E}(t_{\psi_{t+1}}(\mathcal{G}) | \mathcal{F}_t)) = \\ &= t_{\psi_t}(\mathcal{G}) \quad m_t\text{-fast}, \quad t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j-1 \rightarrow j: \quad \text{Die Induktionsvoraussetzung besagt: } t_{\psi_t}(\mathcal{G}) &\geq \\ &\geq t_{\psi_t}(\mathcal{G}) \quad m_t\text{-fast}, \quad t \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also auch: } k_{\psi_{t+1}}(\mathcal{G}) &\geq k_{\psi_{t+1}}(\mathcal{G}) \quad m_{t+1}\text{-fast}, \\ t &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Daraus folgt: } k_{\psi_t}(\mathcal{G}) &= \min(g_t, \mathcal{E}(k_{\psi_{t+1}}(\mathcal{G}) | \mathcal{F}_t)) \geq \\ &\geq \min(g_t, \mathcal{E}(k_{\psi_{t+1}}(\mathcal{G}) | \mathcal{F}_t)) = k_{\psi_t}(\mathcal{G}) \quad m_t\text{-fast}, \\ t &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

b) Induktion nach $j := k - t$, $t \in \mathbb{N}$:

$$j = 0: \quad t_{\psi_t}(\mathcal{G}) = g_t \geq \mathcal{E}(f_t | \mathcal{F}_t) \quad m_t\text{-fast}, \quad t \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} j-1 \rightarrow j: \quad \text{Die Induktionsvoraussetzung liefert: } t_{\psi_t}(\mathcal{G}) &\geq \\ &\geq \mathcal{E}(f_t | \mathcal{F}_t) \quad m_t\text{-fast}, \quad t \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also auch: } k_{\psi_{t+1}}(\mathcal{G}) &\geq \mathcal{E}(f_{t+1} | \mathcal{F}_{t+1}) \quad m_{t+1}\text{-fast}, \\ t &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Daraus folgt: } k_{\psi_t}(\mathcal{G}) &= \min(g_t, \mathcal{E}(k_{\psi_{t+1}}(\mathcal{G}) | \mathcal{F}_t)) \geq \\ &\geq \min(g_t, \mathcal{E}(\mathcal{E}(f_{t+1} | \mathcal{F}_{t+1}) | \mathcal{F}_t)) = \\ &= \min(g_t, \mathcal{E}(f_{t+1} | \mathcal{F}_t)) \geq \mathcal{E}(f_t | \mathcal{F}_t) \quad m_t\text{-fast}, \\ t &\in \mathbb{N}, \text{ da } \mathcal{G} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G}) \text{ ist.} \end{aligned}$$

c) folgt aus a) und b);

d), e) und f) ergeben sich wie im Beweis von (4.8).

(4.15) Folgerung:

Unter Voraussetzung (4.10) gilt für $\psi(\mathcal{G}) := (\psi_t(\mathcal{G}))_{t \in \mathbb{N}}$:

- a) Ist $f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$, so ist $E(f) \stackrel{(m)}{\leq} \psi(f) \stackrel{(m)}{\leq} \psi(\mathcal{G}) \stackrel{(m)}{\leq} \mathcal{G}$,
insbesondere ist $\psi(\mathcal{G})$ das "größte Submartingal", das
 $\stackrel{(m)}{\leq} \mathcal{G}$ ist.
- b) $\psi(\mathcal{G})$ liegt in $\mathcal{M}_3(\mathcal{G})$.

Beweis:

- a) Ist $f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$, so ist wegen (4.14, b und c)

$$\psi(\mathcal{G}) \stackrel{(m)}{\geq} E(f).$$

Diesen Sachverhalt können wir auf $\psi(f)$ anwenden, da nach (4.13, c) und (2.15, b) $\psi(f) \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$ ist, und wir erhalten $\psi(\mathcal{G}) \stackrel{(m)}{\geq} E(\psi(f)) \stackrel{(m)}{=} \psi(f)$ für alle $f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$.

Ferner gilt $\psi(f) \stackrel{(m)}{\geq} E(f)$ (wegen (4.13, c)) und

$$\psi(\mathcal{G}) \stackrel{(m)}{\leq} \mathcal{G} \quad (\text{wegen (4.14, f)}) \text{ für alle } f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G}).$$

- b) Da $E(f)$ in $\mathcal{M}_0$ ist, ist nach a) auch $\psi(\mathcal{G})$ in $\mathcal{M}_0$,
und aus (4.14, f) folgt die Behauptung.

Wir untersuchen nun noch das Verhalten von ψ als Funktion auf $\mathcal{M}_1(\mathcal{G}) \cup \{\mathcal{G}\}$. Dazu beweisen wir zunächst den

(4.16) Hilfssatz:

Sei (4.10) erfüllt und sei $f = (f_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_3(\mathcal{G})$.

Dann gilt für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $k \geq t$ m_t -fast

$$k_{\psi_t}(f) = f_t.$$

Beweis:

Wir führen eine Induktion nach $j := k - t$ für alle $t \in \mathbb{N}$ durch:

$$j = 0: {}^t\psi_t(f) = \mathcal{E}(f_t | \mathcal{F}_t) = f_t \text{ } m_t\text{-fast, } t \in \mathbb{N};$$

$j-1 \rightarrow j$: Die Induktionsvoraussetzung liefert:

$${}^k\psi_{t+1}(f) = f_{t+1} \text{ } m_{t+1}\text{-fast für alle } t \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \text{Folglich gilt: } {}^k\psi_t(f) &= \min(g_t, \mathcal{E}({}^k\psi_{t+1}(f) | \mathcal{F}_t)) = \\ &= \min(g_t, \mathcal{E}(f_{t+1} | \mathcal{F}_t)) = f_t \text{ } m_t\text{-fast, } t \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

da f aus $\mathcal{M}_3(\mathcal{G})$ ist:

Damit gilt der

(4.17) Satz:

Unter Voraussetzung (4.10) gilt für $\psi : \mathcal{M}_1(\mathcal{G}) \cup \{\mathcal{G}\} \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathcal{G})$,
 $f \mapsto \psi(f) := (\psi_t(f))_{t \in \mathbb{N}}$ gemäß (4.13,a) und (4.14,c):

- a) $\psi|_{\mathcal{M}_3(\mathcal{G})} \stackrel{(m)}{=} \text{id}_{\mathcal{M}_3(\mathcal{G})}$, d.h. $\psi(f) \stackrel{(m)}{=} f$ für alle $f \in \mathcal{M}_3(\mathcal{G})$.
- b) $\psi \circ \psi \stackrel{(m)}{=} \psi$, d.h. $\psi(\psi(f)) \stackrel{(m)}{=} \psi(f)$ für alle $f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G}) \cup \{\mathcal{G}\}$.
- c) $\mathcal{M}_3(\mathcal{G}) = \psi(\mathcal{M}_1(\mathcal{G}) \cup \{\mathcal{G}\})$.
- d) $\psi(\mathcal{M}_2(\mathcal{G})) = \mathcal{M}_2(\mathcal{G}) \cap \mathcal{M}_3(\mathcal{G})$.
- e) Sind f, f aus $\mathcal{M}_1(\mathcal{G}) \cup \{\mathcal{G}\}$ mit $f \stackrel{(m)}{\leq} f$, so ist
 $\psi(f) \stackrel{(m)}{\leq} \psi(f)$.

Beweis:

Daß $\mathcal{M}_3(\mathcal{G})$ den Wertebereich von ψ enthält, wissen wir von früher.

- a) a) folgt aus (4.16), b) und c) ergeben sich unmittelbar aus a).
- d) Aus (4.13,e) folgt zunächst $\psi(\mathcal{M}_2(\mathcal{G})) \subset \mathcal{M}_2(\mathcal{G}) \cap \mathcal{M}_3(\mathcal{G})$, dann wegen a) auch die Umkehrung; ist nämlich $f \in \mathcal{M}_2(\mathcal{G}) \cap \mathcal{M}_3(\mathcal{G})$, so ist $\psi(f) \in \psi(\mathcal{M}_2(\mathcal{G}))$ und $\psi(f) \stackrel{(\underline{m})}{=} f$, woraus sich $f \in \psi(\mathcal{M}_2(\mathcal{G}))$ ergibt.
- e) ist eine Folgerung von (4.13,d) bzw. (4.15,a).

Im weiteren Verlauf dieses Paragraphen beschäftigen wir uns mit der Frage, ob und wann für f und f aus $\mathcal{M}_1(\mathcal{G}) \cup \{\mathcal{G}\}$ die Familien $\psi(f)$ und $\psi(f)$ übereinstimmen.

(4.18) Hilfssatz:

Sei (4.10) erfüllt und seien $f = (f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ und $f = (h_t)_{t \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{M}_1(\mathcal{G}) \cup \{\mathcal{G}\}$.

Wir setzen für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $k \geq t$:

$$M_t^k := \{g_j \geq E(\psi_{j+1}(f) | \mathcal{F}_j) \text{ für alle } 1 \leq j < t\}$$

(insbesondere ist also $M_1^k = \Omega$ für alle $k \in \mathbb{N}$, da die zugehörige Indexmenge $\{j : 1 \leq j < 1\}$ leer ist).

Dann gilt:

- a) Für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $k > t$ ist

$$\int_{M_t^k} ({}^k\psi_t(f) - {}^k\psi_t(f)) \, d\mu \leq \int_{M_{t+1}^k} ({}^k\psi_{t+1}(f) - {}^k\psi_{t+1}(f)) \, d\mu.$$

- b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\int_{\Omega} ({}^k\psi_1(f) - {}^k\psi_1(f)) \, d\mu \leq \int_{M_k^k} (h_k - f_k) \, d\mu.$$

Beweis:

- a) Für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $k > t$ ist $M_t^k \in \mathcal{F}_t$ und somit

$$\begin{aligned}
 & \int_{M_t^k} (k_{\psi_t}(f) - k_{\psi_t}(f)) \, d\mu = \\
 & = \int_{M_t^k} (\min(g_t, E(k_{\psi_{t+1}}(f) | \mathcal{F}_t)) - \min(g_t, E(k_{\psi_{t+1}}(f) | \mathcal{F}_t))) \, d\mu = \\
 & = \int_{M_t^k \cap \{g_t < E(k_{\psi_{t+1}}(f) | \mathcal{F}_t)\}} (\min(g_t, E(k_{\psi_{t+1}}(f) | \mathcal{F}_t)) - g_t) \, d\mu + \\
 & + \int_{M_t^k \cap \{g_t \geq E(k_{\psi_{t+1}}(f) | \mathcal{F}_t)\}} (\min(g_t, E(k_{\psi_{t+1}}(f) | \mathcal{F}_t)) - E(k_{\psi_{t+1}}(f) | \mathcal{F}_t)) \, d\mu \leq \\
 & \leq 0 + \int_{M_t^k \cap \{g_t \geq E(k_{\psi_{t+1}}(f) | \mathcal{F}_t)\}} (E(k_{\psi_{t+1}}(f) | \mathcal{F}_t) - E(k_{\psi_{t+1}}(f) | \mathcal{F}_t)) \, d\mu = \\
 & = \int_{M_{t+1}^k} (k_{\psi_{t+1}}(f) - k_{\psi_{t+1}}(f)) \, d\mu .
 \end{aligned}$$

b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $M_k^k \in \mathcal{F}_k$ und daher nach Definition (4.11)

$$\int_{M_k^k} (k_{\psi_k}(f) - k_{\psi_k}(f)) \, d\mu = \int_{M_k^k} (h_k - f_k) \, d\mu .$$

Ferner ist, wie wir festgestellt haben, $M_1^k = \Omega$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Für alle $k > 1$ folgt daher die Behauptung b) aus a), während sie für $k = 1$ trivial ist. (Hier gilt nämlich Gleichheit.)

Mit diesen Hilfsmitteln läßt sich nun beweisen:

(4.19) Hilfssatz:

Sei (4.10) erfüllt und seien $f = (f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ und $g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{M}_1(q) \cup \{q\}$ mit $f \leq g$.

Mit M_t^t wie in (4.18) setzen wir für alle $t \in \mathbb{N}$

$$\rho_t := \chi_{M_t^t} \cdot (h_t - f_t) .$$

Dann gilt: Ist die Familie $(\rho_t)_{t \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar, so ist m_1 -fast $\psi_1(\mathcal{A}) = \psi_1(\mathcal{B})$.

Beweis:

- 1) o.B.d.A. können wir $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{G})$ voraussetzen. Nach (4.13,a) gilt deshalb m_j -fast für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $t > j$:

$$\mathcal{E}(\psi_{j+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_j) \leq \mathcal{E}(\psi_{j+1}^{t+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_j) \quad \text{und}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\psi_{j+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_j) = \mathcal{E}(\psi_{j+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_j).$$

- 2) Wegen 1) ist m_j -fast $\{g_j \geq \mathcal{E}(\psi_{j+1}^{t+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_j)\} \subset \{g_j \geq \mathcal{E}(\psi_{j+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_j)\}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $t > j$, woraus sich für alle $t \in \mathbb{N}$ m -fast $M_t^{t+1} \subset M_t^t$ ergibt.

Ferner gilt nach Definition der M_t^k für alle $t \in \mathbb{N}$ die Beziehung $M_{t+1}^{t+1} \subset M_t^{t+1}$.

Insgesamt erhalten wir also, daß für alle $t \in \mathbb{N}$ m -fast $M_{t+1}^{t+1} \subset M_t^t$ richtig ist.

- 3) Nach 1) erhalten wir außerdem für alle $j \in \mathbb{N}$ m_j -fast $\bigcap_{t=j+1}^{\infty} \{g_j \geq \mathcal{E}(\psi_{j+1}^t(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_j)\} = \{g_j \geq \mathcal{E}(\psi_{j+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_j)\}$.

- 4) Da $\mathcal{G}$ aus $\mathcal{M}_0$ und $\psi(\mathcal{A})$ aus $\mathcal{M}_1(\mathcal{G})$ ist, erfüllt das Paar $(\mathcal{G}, \psi(\mathcal{A}))$ die Voraussetzung (3.1).

Wie in (3.3) setzen wir für alle $j \in \mathbb{N}$

$$j^G := \{g_j < \mathcal{E}(\psi_{j+1}(\mathcal{A}) | \mathcal{F}_j)\}.$$

Unter Berücksichtigung von 3) ergibt sich damit m -fast:

$$\begin{aligned}
 \bigcap_{t \in \mathbb{N}} M_t^t &= \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^{t-1} \{g_j \geq \mathcal{E}({}^t\psi_{j+1}(\mathcal{f}) | \mathcal{F}_j)\} = \\
 &= \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcap_{t=j+1}^{\infty} \{g_j \geq \mathcal{E}({}^t\psi_{j+1}(\mathcal{f}) | \mathcal{F}_j)\} = \\
 &= \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{g_j \geq \mathcal{E}(\psi_{j+1}(\mathcal{f}) | \mathcal{F}_j)\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} j\bar{G} = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} jG}.
 \end{aligned}$$

Aus dem Beweis von (3.6) wissen wir, daß $m(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} jG) = 1$ ist; also gilt $m(\bigcap_{t \in \mathbb{N}} M_t^t) = 0$.

- 5) Wegen $\mathcal{f} \stackrel{(m)}{\leq} f$ ist m -fast $\rho_t \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{N}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist ferner $\{|\rho_t| \geq \varepsilon\} \subset M_t^t$, $t \in \mathbb{N}$. Nach 2) und 4) gilt demnach für alle $\varepsilon > 0$ die Gleichung $\lim_{t \rightarrow \infty} m(\{|\rho_t| \geq \varepsilon\}) = m(\bigcap_{t \in \mathbb{N}} M_t^t) = 0$.

Wir können daher (2.8) anwenden, und die gleichgradige Integrierbarkeit der ρ_t liefert uns die Aussage:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \rho_t \, dm = 0.$$

- 6) Aus $\mathcal{f} \stackrel{(m)}{\leq} f$ folgt bekanntlich m_1 -fast $\psi_1(\mathcal{f}) \leq \psi_1(f)$. Wegen 5) und (4.18,b) können wir daher unter Beachtung von (4.8,c) schreiben:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_{\Omega} (\psi_1(f) - \psi_1(\mathcal{f})) \, dm = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} ({}^t\psi_1(f) - {}^t\psi_1(\mathcal{f})) \, dm \leq \\
 &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \rho_t \, dm = 0.
 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir nach (1.7), daß m_1 -fast $\psi_1(\mathcal{f}) = \psi_1(f)$ ist.

Aus (4.19) ergibt sich nun der

(4.20) Satz:

Ist (4.10) erfüllt und sind $\mathcal{f} = (f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ und $\mathcal{g} = (h_t)_{t \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{M}_1(\mathcal{Q}) \cup \{\mathcal{Q}\}$ mit $\mathcal{f} \stackrel{(m)}{\leq} \mathcal{g}$, so gilt:

- a) Aus der gleichgradigen Integrierbarkeit der Familie $(h_t - f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ folgt $\psi(\mathcal{f}) \stackrel{(m)}{=} \psi(\mathcal{g})$.
- b) Sind $\mathcal{f}$ und $\mathcal{g}$ aus $\mathcal{M}_3(\mathcal{Q})$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) $\int \sup_{t \in \mathbb{N}} (h_t - f_t) \, d\mu < \infty$
- 2) Die Familie $(h_t - f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar.
- 3) $\mathcal{f} \stackrel{(m)}{=} \mathcal{g}$.
- 4) $\int \sup_{t \in \mathbb{N}} (h_t - f_t) \, d\mu = 0$.

Beweis:

- a) Die Eigenschaft der gleichgradigen Integrierbarkeit überträgt sich sicherlich von der Familie $(h_t - f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ auf die Familie $(\rho_t)_{t \in \mathbb{N}}$ aus (4.19). Somit erhalten wir zunächst aus (4.19): Ist die Familie $(h_t - f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar, so ist m_1 -fast $\psi_1(\mathcal{f}) = \psi_1(\mathcal{g})$.

Betrachten wir jetzt für jedes $t \in \mathbb{N}$ die Familien $(f_j)_{j \geq t}$ und $(h_j)_{j \geq t}$, so ergibt sich analog aus der gleichgradigen Integrierbarkeit der Familie $(h_j - f_j)_{j \geq t}$ die Beziehung: $\psi_t(\mathcal{f}) = \psi_t(\mathcal{g})$ m_t -fast.

Daraus folgt die Behauptung.

- b) Die Implikationen von 1) nach 2), von 3) nach 4) und von 4) nach 1) sind trivial.

Wegen Teil a) und nach (4.17,a) folgt 3) aus 2).

In (4.20) können wir, ohne dadurch etwas zu verlieren, $\mathcal{f}$ und $\mathcal{g}$ aus $\mathcal{M}$ voraussetzen; denn es gilt allgemein die

(4.21) Bemerkung:

In der Situation von (2.1) überträgt sich die Eigenschaft der gleichgradigen Integrierbarkeit stets von der Familie $\mathcal{f} = (f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ aus $\tilde{\mathcal{M}}$ auf die Familie $\mathcal{E}(\mathcal{f})$ aus $\mathcal{M}$.

Die Umkehrung hiervon gilt dagegen im allgemeinen selbst dann nicht, wenn es sich bei $\mathcal{F}$ um den von den $\mathcal{F}_t$ erzeugten σ -Körper $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\bigcup_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_t)$ handelt und wenn $f_t \geq 0$ m -fast für alle $t \in \mathbb{N}$ ist.

Beweis:

Sei $\mathcal{f} = (f_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{M}}$ gleichgradig integrierbar.

Insbesondere gibt es dann ein $k > 0$ mit $\int_{\Omega} |f_t| dm \leq k < \infty$ für alle $t \in \mathbb{N}$ (siehe etwa [1], Satz (20.2)).

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest gewählt. Nach (2.7) existiert dazu ein $v \in \mathbb{N}$, so daß für alle $t \in \mathbb{N}$ $\int_{\{|f_t| \geq v\}} |f_t| dm \leq \frac{\varepsilon}{2}$ gilt.

Wir setzen $\rho := \frac{2vk}{\varepsilon}$ und für alle $t \in \mathbb{N}$

$$F_t := \{ |\mathcal{E}(f_t | \mathcal{F}_t)| \geq \rho \}.$$

Es ist $F_t \in \mathcal{F}_t$, und auf F_t gilt $v \leq \frac{\varepsilon}{2k} \cdot |\mathcal{E}(f_t | \mathcal{F}_t)|$,

so daß wir für alle $t \in \mathbb{N}$ folgende Abschätzung erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{F_t} |\mathcal{E}(f_t | \mathcal{F}_t)| dm &\leq \int_{F_t} \mathcal{E}(|f_t| | \mathcal{F}_t) dm = \int_{F_t} |f_t| dm = \\ &= \int_{F_t \cap \{|f_t| \geq v\}} |f_t| dm + \int_{F_t \cap \{|f_t| < v\}} |f_t| dm \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{F_t} v dm \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{F_t} \frac{\varepsilon}{2k} \cdot |\mathcal{E}(f_t | \mathcal{F}_t)| dm \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2k} \cdot \int_{\Omega} \mathcal{E}(|f_t| | \mathcal{F}_t) dm \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2k} \cdot k = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da ε beliebig war, folgt hieraus die gleichgradige Integrierbarkeit von $\mathcal{E}(f)$.

Den Rest der Behauptung beweist folgendes Beispiel:

Zu $X := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sei $\mathcal{L} := \mathcal{L}^1|X$ die Einschränkung der σ -Algebra $\mathcal{L}^1$ der Borelmengen auf X und $\lambda := \lambda^1|X$ die Einschränkung des Lebesgue-Maßes λ^1 auf X .

Für alle $t \in \mathbb{N}$ setzen wir $(X_t, \mathcal{L}_t, \lambda_t) := (X, \mathcal{L}, \lambda)$.

Dann sei $\Omega := \prod_{t \in \mathbb{N}} X_t$, $\mathcal{F}$ sei der Produkt- σ -Körper $\bigotimes_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_t$

und m das Produktmaß $\bigotimes_{t \in \mathbb{N}} \lambda_t$.

Ferner sei für alle $t \in \mathbb{N}$ $X^{(t)} := \prod_{j=1}^t X_j$, $\mathcal{L}^{(t)} := \bigotimes_{j=1}^t \mathcal{L}_j$,

und $\pi_t : \Omega \rightarrow X^{(t)}$, $(x_1, x_2, \dots, x_t, \dots) \mapsto (x_1, \dots, x_t)$ die Projektionsabbildung.

Wir setzen für jedes $t \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_{t+1} := \pi_t^{-1}(\mathcal{L}^{(t)}) :=$

$:= \{\pi_t^{-1}(B^{(t)}) : B^{(t)} \in \mathcal{L}^{(t)}\}$; $\mathcal{F}_1$ sei gleich $\{\emptyset, \Omega\}$.

Damit ist die Situation von (2.1) gegeben.

Wir definieren für alle $t \in \mathbb{N}$

$$f_t(x_1, x_2, \dots, x_t, \dots) := \begin{cases} 2^{t-1}, & \text{falls } -\frac{1}{2^t} \leq x_t \leq \frac{1}{2^t} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{f} = (f_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{M}}$.

Wie man leicht nachrechnet, gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $t \geq k + 1$:

$$\int_{\{f_t \geq 2^k\}} f_t \, dm = \int_{[-2^{-t}, 2^{-t}]} 2^{t-1} \, d\lambda_t = 1.$$

Folglich ist f nicht gleichgradig integrierbar.

Andererseits sieht man aus der Definition von $\mathcal{F}_t$ und f_t unmittelbar, daß für alle $t \in \mathbb{N}$ $\mathcal{E}(f_t | \mathcal{F}_t) =$

$$= \int_{[-2^{-t}, 2^{-t}]} 2^{t-1} d\lambda_t = 1 \quad \text{ist, woraus sich die gleichgradige}$$

Integrierbarkeit von $\mathcal{E}(f)$ ergibt.

Die Überlegungen von (4.18) an haben vor allem den Zweck, möglichst einfache Bedingungen zu finden, unter denen in der Situation von (4.10) für ein f aus $\mathcal{M}_2(\mathcal{G})$ die Gleichung $\psi(f) \stackrel{(\mathbb{M})}{=} \psi(\mathcal{G})$ gilt. Im allgemeinen sind nämlich die Funktionen ${}^k\psi_t(\mathcal{G})$ leichter zu berechnen als die ${}^k\psi_t(f)$.

Darüberhinaus läßt sich bei $\psi(f) \stackrel{(\mathbb{M})}{=} \psi(\mathcal{G})$ für alle $t \in \mathbb{N}$ $\psi_t(f)$ mit Hilfe der Differenz $({}^k\psi_t(\mathcal{G}) - {}^k\psi_t(f))$ abschätzen (wegen ${}^k\psi_t(\mathcal{G}) \geq \psi_t(\mathcal{G}) = \psi_t(f) \geq {}^k\psi_t(f)$ m_t -fast).

Im nächsten Paragraphen wird sich herausstellen, daß für alle $f, g \in \mathcal{M}_2(\mathcal{G})$ gilt: $\psi(f) \stackrel{(\mathbb{M})}{=} \psi(g)$ (siehe (5.7)). Im Vorgriff darauf wollen wir jetzt einige Bedingungen an $\mathcal{G}$ explizit angeben, unter denen $\psi(\mathcal{M}_2(\mathcal{G})) = \{\psi(\mathcal{G})\}$ gilt.

(4.22) Bemerkung:

Sei (4.10) erfüllt. Für alle $f \in \mathcal{M}_2(\mathcal{G})$ sei $\psi(f) = \psi =: (\psi_t)_{t \in \mathbb{N}}$.

Wir betrachten folgende Bedingungen:

- 1) $\mathcal{G} = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ sei gemäß (2.12, VI) gegeben mit $g_t = c_t + r_t$ und $\mathcal{E}(r_t | \mathcal{F}_t) \geq \mathcal{E}(r | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$; dabei sei die Familie $(\mathcal{E}(r_t | \mathcal{F}_t))_{t \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar.

- 2) $q_t = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ sei gemäß (2.12,V) gegeben mit $g_t = c(t) + q_t$, $t \in \mathbb{N}$; dabei sei die Familie $(q_t)_{t \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar.
- 3) $q_t = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ erfülle (2.12,IV) mit $q_t^* = (g_t^*)_{t \in \mathbb{N}}$; dabei sei die Familie $(g_t - \mathcal{E}(\inf_{j \geq t} g_j^* | \mathcal{F}_t))_{t \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar.

Dann gilt:

Unter 1), 2) oder 3) ist $\psi \left(\underline{m} \right) \psi(q)$.

Beim Vergleich von 2) und 3) stellen wir noch fest:

Ist 2) erfüllt, so läßt sich stets ein q_t^* finden, so daß auch 3) richtig ist; dagegen kann Voraussetzung 3) zutreffen, ohne daß eine Folge $(c(t))_{t \in \mathbb{N}}$ im Sinne von 2) existiert.

Beweis:

Gilt 1), so ist wegen (2.15,c) die Familie $(\mathcal{E}([c_t + r] | \mathcal{F}_t))_{t \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{M}_2(q)$.

Ferner überträgt sich die Eigenschaft der gleichgradigen Integrierbarkeit wegen (2.10) von der Familie $(\mathcal{E}(r_t | \mathcal{F}_t))_{t \in \mathbb{N}}$ auf die Familie $(\mathcal{E}([r_t - r] | \mathcal{F}_t))_{t \in \mathbb{N}} = (g_t - \mathcal{E}([c_t + r] | \mathcal{F}_t))_{t \in \mathbb{N}}$.

Nach (4.20,a) ist dann $\psi \left(\underline{m} \right) \psi(q)$.

Bei den Voraussetzungen 2) und 3) handelt es sich nach (2.13,6,2. und 3.) um Spezialfälle von 1) .

Zum Vergleich von 2) und 3) nehmen wir zunächst an, es sei 2) erfüllt. Wir setzen $g_t^* := g_t - \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t) + q$ (mit q gemäß (2.12,V)). Wie im Beweis zu (2.13,6) läßt sich zeigen, daß q mit $q_t^* := (g_t^*)_{t \in \mathbb{N}}$ der Bedingung (2.12,IV) genügt. Ferner ist für alle $t \in \mathbb{N}$ $g_t^* - c(t) = q_t - \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t) + q \geq q$ m-fast, so daß wir folgende Abschätzung erhalten:

$$q_t - q \geq q_t - \inf_{j \in \mathbb{N}} (g_j^* - c(j)) \geq q_t - c(t) - \inf_{j \geq t} (g_j^* - c(j)) \geq \\ \geq q_t - \inf_{j \geq t} g_j^* \text{ m-fast.}$$

Mit $(q_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ist also auch die Familie $(g_t - \inf_{j \geq t} g_j^*)_{t \in \mathbb{N}}$ und wegen (4.21) schließlich die Familie $(g_t - \mathcal{E}(\inf_{j \geq t} g_j^* | \mathcal{F}_t))_{t \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar.

Den Rest der Behauptung zeigen wir anhand eines Beispiels:

Sei $\Omega := \{a, b\}$; $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t := \mathcal{P}(\Omega)$ für alle $t \in \mathbb{N}$;

$m(\{a\}) := m(\{b\}) := \frac{1}{2}$; $g_t(a) := t$, $g_t(b) := 2t$ für alle $t \in \mathbb{N}$.

$g := (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ erfüllt also die Voraussetzung 3) (mit $g^* := g$), denn für alle $t \in \mathbb{N}$ ist $g_t = \inf_{j \geq t} g_j = \mathcal{E}(\inf_{j \geq t} g_j^* | \mathcal{F}_t)$.

Dagegen läßt sich nicht erreichen, daß 2) richtig ist.

Gilt nämlich $g_t(\omega) = c(t) + q_t(\omega)$ gemäß (2.12,V) mit $q_t(\omega) \geq \mathcal{E}(q | \mathcal{F}_t)(\omega) = q(\omega)$, $t \in \mathbb{N}$, so ist für alle $t \in \mathbb{N}$ $q_t(a) = g_t(a) - c(t) = t - c(t)$.

Dabei muß $-\infty < \int_{\{a\}} q \, dm \leq \int_{\{a\}} \inf_{t \in \mathbb{N}} q_t \, dm = \frac{1}{2} \cdot \inf_{t \in \mathbb{N}} q_t(a) = \frac{1}{2} \cdot \inf_{t \in \mathbb{N}} (t - c(t))$ gelten.

Folglich ist für höchstens endlich viele $t \in \mathbb{N}$ $c(t) \geq \frac{3}{2}t$; für unendlich viele $t \in \mathbb{N}$ gilt demnach $c(t) < \frac{3}{2}t$.

Daraus folgt $\int_{\{b\}} q_t \, dm = \frac{1}{2} (g_t(b) - c(t)) = \frac{1}{2} (2t - c(t)) \geq \frac{1}{2} (2t - \frac{3}{2}t) = \frac{1}{4}$ für alle $t \in \mathbb{N}$, d.h. $\sup_{t \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} |q_t| \, dm = \infty$.

Nach [1], Satz (20,2), ist deshalb $(q_t)_{t \in \mathbb{N}}$ nicht gleichgradig integrierbar.

§ 5 Die Konstruktion der Snell'schen Enveloppe

Nachdem wir die nötigen Hilfsmittel zusammengestellt haben, können wir jetzt darangehen, zu jedem zulässigen q die Snell'sche Enveloppe zu berechnen. Nach (3.17) genügt es dazu, eine Familie $\tilde{u}$ zu konstruieren, so daß für q und $\tilde{u}$ (3.11,b) richtig ist. Mit diesem $\tilde{u}$ können wir dann aufgrund der Ergebnisse von § 3 E-optimale Stopzeiten zu q bestimmen.

Wieder sei die Situation von (2.1) gegeben, und wir gehen aus von folgender

(5.1) Voraussetzung:

Sei $J = \{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ oder $J = \mathbb{N}$
 $q = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ sei eine fest gewählte zulässige Familie aus $\mathcal{M}_J$.

Ferner gelte mit $g_t =: (g_t^{(i)})_{i \in J}$ für alle $t \in \mathbb{N}$
 und $q^{(i)} := (g_t^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}$ für alle $i \in J$:

Es sei $f^{(i)} = (f_t^{(i)})_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_2(q^{(i)})$ für alle $i \in J$.

Wir führen noch eine Abkürzung ein:

(5.2) Bezeichnung:

Sei (5.1) erfüllt.

Für alle $i \in J$ setzen wir $\tilde{q}^{(i)} := (\tilde{g}_t^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}$ mit
 $\tilde{g}_t^{(i)} := (g_t^{(j)})_{j=1}^i$ für alle $t \in \mathbb{N}$,

d.h. $\tilde{q}^{(i)} \in \mathcal{M}_{\{1, \dots, i\}}$.

Die Konstruktion der Snell'schen Enveloppe zu q geschieht komponentenweise gemäß der

(5.3) Konstruktionsvorschrift:

Sei (5.1) erfüllt. Dann gehen wir induktiv vor:

1. Schritt:

Wir bilden für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $k \geq t$ gemäß (4.11) und (4.4)

$$k_{\psi_t}(\mathcal{A}^{(1)}) := k_{\varphi_t}(\mathcal{Q}^{(1)}, \mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{K}^{(1)}, \mathcal{L}^{(1)}) \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{K}^{(1)} := ({}_t K^{(1)})_{t \in \mathbb{N}}, \quad {}_t K^{(1)} := \emptyset \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}^{(1)} := ({}_t L^{(1)})_{t \in \mathbb{N}}, \quad {}_t L^{(1)} := \Omega \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}$$

(vgl. (4.12)).

Nach (4.13,a) existiert dann $\lim_{k \rightarrow \infty} k_{\psi_t}(\mathcal{A}^{(1)}) =: \psi_t(\mathcal{A}^{(1)})$

für alle $t \in \mathbb{N}$ (m_t -fast) .

Wir setzen nun

$$\tilde{u}_t^{(1)} := u_t^{(1)} := \psi_t(\mathcal{A}^{(1)}) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N},$$

$$\tilde{u}^{(1)} := \tilde{u}^{(1)} := \psi(\mathcal{A}^{(1)}) = (\psi_t(\mathcal{A}^{(1)}))_{t \in \mathbb{N}}.$$

Nach (4.13,c) ist $\psi(\mathcal{A}^{(1)})$ aus $\mathcal{M}_3(\mathcal{Q}^{(1)})$, folglich erfüllt das Paar $(\tilde{\mathcal{Q}}^{(1)}, \tilde{u}^{(1)})$ die Voraussetzung (3.1), und zwar in $\mathcal{M}_{\{1\}}$.

1. Schritt:

Sei für $i-1 \in J$ $\tilde{u}^{(i-1)} = (\tilde{u}_t^{(i-1)})_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_{\{1, \dots, i-1\}}$

mit $\tilde{u}_t^{(i-1)} := (u_t^{(j)})_{j \leq i-1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{i-1}$, $t \in \mathbb{N}$, gegeben.

Dabei gelte für das Paar $(\tilde{g}^{(i-1)}, \tilde{u}^{(i-1)})$ die Voraussetzung (3.1) in $\mathcal{M}_{\{1, \dots, i-1\}}$.

Dann setzen wir zunächst (vgl. (3.3)):

$${}_t K^{(i)} := {}_t G^{(i-1)} := \{\tilde{g}_t^{(i-1)} \mid \tilde{u}_{t+1}^{(i-1)} \mid \mathcal{F}_t\}, \quad t \in \mathbb{N};$$

$${}_t L^{(i)} := {}_t H^{(i-1)} := \{\tilde{g}_t^{(i-1)} \mid \tilde{u}_{t+1}^{(i-1)} \mid \mathcal{F}_t\}, \quad t \in \mathbb{N};$$

$$\mathcal{K}^{(i)} := ({}_t K^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}, \quad \mathcal{L}^{(i)} := ({}_t L^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}.$$

$\mathcal{G}^{(i)}, \mathcal{F}^{(i)}, \mathcal{K}^{(i)}$ und $\mathcal{L}^{(i)}$ erfüllen die Voraussetzung (4.1), und es existiert eine mit $(\mathcal{G}^{(i)}, \mathcal{F}^{(i)}; \mathcal{K}^{(i)}, \mathcal{L}^{(i)})$ verträgliche Folge $({}^{(i)}_T(t))_{t \in \mathbb{N}}$ gemäß (4.2). In der Tat folgt aus dem Beweis von (3.6)

$$m(\bigcup_{t \in \mathbb{N}} {}_t K^{(i)}) = m(\bigcup_{t \in \mathbb{N}} {}_t L^{(i)}) = 1.$$

Analog erhalten wir, indem wir (3.6) jeweils auf die Indexmenge $\{t, t+1, t+2, \dots\}$ anwenden:

$$m(\bigcup_{j \geq t} {}_j K^{(i)}) = m(\bigcup_{j \geq t} {}_j L^{(i)}) = 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N},$$

womit die Gültigkeit von (4.1) nachgewiesen ist.

Ist nun $\mathcal{C}^{(i)} := ({}_t C^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Elementen ${}_t C^{(i)} \in \mathcal{F}_t$ mit ${}_t K^{(i)} \subset {}_t C^{(i)} \subset {}_t L^{(i)}$, $t \in \mathbb{N}$,

und setzen wir für alle $t \in \mathbb{N}$

$${}^{(i)}_j C_j^t := \bigcup_{t \leq l \leq j} {}_l C^{(i)} \quad \text{für } j \geq t, \quad {}^{(i)}_{C_{t-1}}^t := \emptyset,$$

$$\text{sowie } {}^{(i)}_T(t)({}_\omega) := \begin{cases} j, & \text{falls } \omega \in {}^{(i)}_j C_j^t \cap \overline{{}^{(i)}_{C_{j-1}}^t}, \quad j \geq t \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

so erfüllt nach (4.3,a) die Folge $({}^{(i)}_T(t))_{t \in \mathbb{N}}$ die

Bedingungen a), b) und c) von (4.2).

Ferner ergibt sich hierbei aus (3.7) $\int_{\Omega} \tilde{u}_1^{(i-1)} dm \geq$
 $\geq \int_{\Omega} \tilde{g}_{(i)T}(1) dm$, und ebenso erhalten wir für alle $t \in \mathbb{N}$
 durch Anwendung von (3.7) auf $\{t, t+1, t+2, \dots\}$:
 $\int_{\Omega} \tilde{u}_t^{(i-1)} dm \geq \int_{\Omega} \tilde{g}_{(i)T}(t) dm$.

Aus der ersten Zeile dieser Ungleichung folgt:

$\infty > \int_{\Omega} u_t^{(1)} dm \geq \int_{\Omega} g_{(i)T}(t) dm$, $t \in \mathbb{N}$,
 so daß nach (2.5, b) $\int_{\Omega} g_{(i)T}(t) dm < \infty$ ist, $t \in \mathbb{N}$.

$\phi^{(i)} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{G}^{(i)})$ liefert schließlich $\mathcal{E}(f_t^{(i)} | \mathcal{F}_t) \leq$
 $\leq \mathcal{E}(g_{(i)T}(t) | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

$(\phi_t^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}$ ist also eine mit $(\mathcal{G}^{(i)}, \phi^{(i)}; \mathcal{K}^{(i)}, \mathcal{L}^{(i)})$
 verträgliche Folge, wie behauptet war.

Wir bilden nun für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $k \geq t$

$k_{\phi_t}(\mathcal{G}^{(i)}, \phi^{(i)}; \mathcal{K}^{(i)}, \mathcal{L}^{(i)})$ gemäß (4.4).

Nach (4.8, a) existiert dann $\lim_{k \rightarrow \infty} k_{\phi_t}(\mathcal{G}^{(i)}, \phi^{(i)}; \mathcal{K}^{(i)}, \mathcal{L}^{(i)}) =$

$=: \varphi_t(\mathcal{G}^{(i)}, \phi^{(i)}; \mathcal{K}^{(i)}, \mathcal{L}^{(i)}) =: \varphi_t(\phi^{(i)})$ für alle $t \in \mathbb{N}$
 $(m_t$ -fast).

Ferner setzen wir:

$u_t^{(i)} := \varphi_t(\phi^{(i)})$ für alle $t \in \mathbb{N}$, $\tilde{u}^{(i)} := (u_t^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}$,

$\tilde{u}_t^{(i)} := \begin{pmatrix} \tilde{u}_t^{(i-1)} \\ u_t^{(i)} \end{pmatrix} = (u_t^{(j)})_{j=1}^i$ für alle $t \in \mathbb{N}$, $\tilde{u}^{(i)} := (\tilde{u}_t^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}$.

Nach (4.9,c) ist $\mathcal{M}^{(i)}$ aus $\mathcal{M}_0$.

Ferner gilt für alle $t \in \mathbb{N}$ nach Definition der ${}_t K^{(i)}$ und ${}_t L^{(i)}$:

$$\begin{aligned} & E\text{-min } (\tilde{g}_t^{(i)}, \mathcal{E}(\tilde{u}_{t+1}^{(i)} | \mathcal{F}_t)) = \\ & = E\text{-min } \left(\begin{pmatrix} \tilde{g}_t^{(i-1)} \\ g_t^{(i)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\tilde{u}_{t+1}^{(i-1)} | \mathcal{F}_t) \\ \mathcal{E}(u_{t+1}^{(i)} | \mathcal{F}_t) \end{pmatrix} \right) = \\ & = \begin{cases} \begin{pmatrix} \tilde{g}_t^{(i-1)} \\ g_t^{(i)} \end{pmatrix} & \text{auf } {}_t K^{(i)} \\ \begin{pmatrix} \tilde{g}_t^{(i-1)} \\ \min(g_t^{(i)}, \mathcal{E}(u_{t+1}^{(i)} | \mathcal{F}_t)) \end{pmatrix} & \text{auf } {}_t L^{(i)} \cap \overline{{}_t K^{(i)}} \\ \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\tilde{u}_{t+1}^{(i-1)} | \mathcal{F}_t) \\ \mathcal{E}(u_{t+1}^{(i)} | \mathcal{F}_t) \end{pmatrix} & \text{auf } \overline{{}_t L^{(i)}} \end{cases} \\ & = \begin{pmatrix} \tilde{u}_t^{(i-1)} \\ u_t^{(i)} \end{pmatrix} = \tilde{u}_t^{(i)} \quad \text{auf ganz } \Omega \quad (\text{vgl. (4.8,e)}). \end{aligned}$$

Folglich erfüllt $(\tilde{g}^{(i)}, \tilde{\mathcal{M}}^{(i)})$ die Voraussetzung (3.1) in $\mathcal{M}_{\{1, \dots, i\}}$.

(5.4) Hilfssatz:

Sei (5.1) erfüllt.

Für alle $i \in J$ sei $\tilde{\mathcal{M}}^{(i)} = (\tilde{u}_t^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}$ wie in (5.3) definiert.

Dann gilt für alle $i \in J$ und alle $t \in \mathbb{N}$

$$\tilde{u}_t^{(i)} \leq \mathcal{E}(\tilde{g}_{T(t)}^{(i)} | \mathcal{F}_t) \quad m_t\text{-fast für alle Stopzeiten } T(t)$$

der Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t}$ mit $\int_{\Omega} \tilde{g}_{T(t)}^{(i)} dm < \infty$.

Beweis:

Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach i :

$i = 1$: Wegen $\tilde{u}_t^{(1)} = u_t^{(1)} = \psi_t(\mathcal{F}^{(1)})$ für alle $t \in \mathbb{N}$

ist nach (4.13,e) der Induktionsanfang klar.

$i-1 \rightarrow i$: Sei für alle $t \in \mathbb{N}$ $\tilde{u}_t^{(i-1)} \leq \mathcal{E}(\tilde{g}_{T(t)}^{(i-1)} | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast
für alle Stopzeiten $T^{(t)}$ der Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t}$ mit
 $\int_{\Omega} \tilde{g}_{T(t)}^{(i-1)} dm < \infty$.

Mit ${}_t K^{(i)} = {}_t G^{(i-1)}$, $t \in \mathbb{N}$, gemäß (5.3) sowie mit

$G_t^{(i-1)} := \bigcup_{l \leq t} {}_l G^{(i-1)}$, $t \in \mathbb{N}$, $G_0^{(i-1)} := \emptyset$, sei

$$(i-1)_{T*} := \begin{cases} t & \text{auf } G_t^{(i-1)} \cap \overline{G_{t-1}^{(i-1)}} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, t \in \mathbb{N}$$

(vgl. (3.3)).

Aus (5.3) wissen wir, daß das Paar $(\tilde{g}_t^{(i-1)}, \tilde{u}_t^{(i-1)})$ der Voraussetzung (3.1) genügt. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung ist also (in $\mathcal{M}_{\{1, \dots, i-1\}}$) die Bedingung (3.11,b) erfüllt, und wegen (3.14,5), (3.10,α und β) und (3.18) sind für eine Stopzeit T_0 der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ folgende Aussagen äquivalent.

- 1) T_0 ist E-optimal zu $\tilde{g}_t^{(i-1)}$;
- 2) $\tilde{u}_1^{(i-1)} = \mathcal{E}(\tilde{g}_{T_0}^{(i-1)} | \mathcal{F}_1)$ m_1 -fast;
- 3) $\tilde{u}_{T_0}^{(i-1)} = \tilde{g}_{T_0}^{(i-1)}$ und $T_0 \leq (i-1)_{T*}$ m -fast;

$$4) \{T_0 = t\} \subset {}_tH^{(i-1)} = {}_tL^{(i)} \quad \text{und} \\ {}_tK^{(i)} = {}_tG^{(i-1)} \subset \{T_0 \leq t\} \quad m_t\text{-fast}, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Für eine Stopzeit T_0 der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ gilt also $\tilde{u}_1^{(i-1)} = \mathcal{E}(\tilde{g}_{T_0}^{(i-1)} | \mathcal{F}_1)$ m_1 -fast genau dann, wenn

$$\{T_0 = t\} \subset {}_tL^{(i)} \quad \text{und} \quad {}_tK^{(i)} \subset \{T_0 \leq t\} \quad m_t\text{-fast für alle} \\ t \in \mathbb{N} \quad \text{ist.}$$

Analog erhalten wir aus den genannten Sätzen des § 3, jetzt für jedes $t \in \mathbb{N}$ auf die Indexmenge $\{t, t+1, \dots\}$ angewandt, daß für eine Stopzeit $T_0^{(t)}$ der Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t}$

$$\tilde{u}_t^{(i-1)} = \mathcal{E}(\tilde{g}_{T_0^{(t)}}^{(i-1)} | \mathcal{F}_t) \quad m_t\text{-fast genau dann gilt, wenn für} \\ \text{alle } j \geq t \quad \{T_0^{(t)} = j\} \subset {}_jL^{(i)} \quad \text{und} \quad {}_jK^{(i)} \subset \{T_0^{(t)} \leq j\} \\ m_j\text{-fast richtig ist. (*)}$$

Ferner gilt für jede Stopzeit $T_0^{(t)}$ der Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t}$ mit $\tilde{u}_t^{(i-1)} = \mathcal{E}(\tilde{g}_{T_0^{(t)}}^{(i-1)} | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast,

$$\text{daß} \quad \int_{\Omega} g_{T_0^{(t)}}^{(1)} \, d\mathbf{m} = \int_{\Omega} u_t^{(1)} \, d\mathbf{m} < \infty \quad \text{ist,}$$

woraus nach (2.5,b) auch $\int_{\Omega} g_{T_0^{(t)}}^{(i)} \, d\mathbf{m} < \infty$ folgt. (**)

Sei nun $t_0 \in \mathbb{N}$ und sei $T_0^{(t_0)}$ eine Stopzeit der Familie $(\mathcal{F}_j)_{j \geq t_0}$ mit $\tilde{u}_{t_0}^{(i-1)} = \mathcal{E}(\tilde{g}_{T_0^{(t_0)}}^{(i-1)} | \mathcal{F}_{t_0})$ m_{t_0} -fast.

Dann gilt nach (4.7,b) wegen (*) und (**):

Für alle $k \geq t_0$ ist $k_{\varphi_{t_0}}(\ell^{(i)}) := k_{\varphi_{t_0}}(g^{(i)}, \ell^{(i)}; \mathcal{R}^{(i)}, \mathcal{L}^{(i)})$
 $\leq \mathcal{E}(g_{T(t_0)}^{(i)} | \mathcal{F}_{t_0})$ m_{t_0} -fast, also ist auch

$$u_{t_0}^{(i)} = \lim_{k \rightarrow \infty} k_{\varphi_{t_0}}(\ell^{(i)}) \leq \mathcal{E}(g_{T(t_0)}^{(i)} | \mathcal{F}_{t_0}) \text{ } m_{t_0}\text{-fast.}$$

$$\begin{aligned} \text{Daraus folgt } \tilde{u}_{t_0}^{(i)} &= \begin{pmatrix} \tilde{u}_{t_0}^{(i-1)} \\ u_{t_0}^{(i)} \end{pmatrix} \stackrel{E}{\leq} \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\tilde{g}_{T(t_0)}^{(i-1)} | \mathcal{F}_{t_0}) \\ \mathcal{E}(g_{T(t_0)}^{(i)} | \mathcal{F}_{t_0}) \end{pmatrix} = \\ &= \mathcal{E}(\tilde{g}_{T(t_0)}^{(i)} | \mathcal{F}_{t_0}) \text{ } m_{t_0}\text{-fast für alle Stopzeiten } T^{(t_0)} \text{ der} \\ &\text{Familie } (\mathcal{F}_j)_{j \geq t_0} \text{ mit } \int_{\Omega} \tilde{g}_{T(t_0)}^{(i)} dm < \infty. \end{aligned}$$

Da t_0 beliebig war, ist die Behauptung bewiesen.

Damit können wir als Hauptergebnis dieser Arbeit folgendes festhalten:

(5.5) Satz:

Sei Voraussetzung (5.1) erfüllt.

Mit $u_t^{(i)}$ gemäß (5.3) setzen wir für alle $t \in \mathbb{N}$

$$u_t := (u_t^{(i)})_{i \in J}, \text{ ferner } \mathcal{N} := (u_t)_{t \in \mathbb{N}}.$$

Dann gilt:

- 1) g und $\mathcal{N}$ genügen der Bedingung (3.11,b), insbesondere also auch der Voraussetzung (3.1).
- 2) $\mathcal{N}$ ist die Snell'sche Enveloppe zu g .
- 3) Bilden wir zu g und $\mathcal{N}$ die Stopzeiten T^* und T_* gemäß (3.3), so sind T^* und T_* E-optimal zu g ,

und es ist $\int_{\Omega} g_{T^*} dm = \int_{\Omega} g_{T^*} dm = \int_{\Omega} u_1 dm$.

- 4) Eine Stopzeit T_0 ist genau dann E-optimal zu $\mathcal{G}$, wenn m-fast $u_{T_0} = g_{T_0}$ und $T_0 \leq T^*$ gilt.

Beweis:

- 1) Aus (5.3) wissen wir, daß für alle $i \in J$ $\tilde{u}^{(i)} \in \mathcal{M}_0$ ist und m_t -fast $\tilde{u}_t^{(i)} = E\text{-min}(g_t^{(i)}, E(\tilde{u}_{t+1}^{(i)} | \mathcal{F}_t))$, $t \in \mathbb{N}$, gilt. Nach Definition der $u_t := (u_t^{(i)})_{i \in J}$ ist also auch $u_t = E\text{-min}(g_t, E(u_{t+1} | \mathcal{F}_t))$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$, womit für $(\mathcal{G}, \tilde{u})$ die Gültigkeit von (3.1) nachgewiesen ist.
- Ferner ergibt sich aus (5.4) für alle $i \in J$, daß $\tilde{g}^{(i)}$ und $\tilde{u}^{(i)}$ in $\mathcal{M}_{\{1, \dots, i\}}$ die Bedingung (3.11,b) erfüllen. Folglich gilt (3.11,b) auch für $\mathcal{G}$ und $\tilde{u}$ in $\mathcal{M}_J$.
- 2), 3) und 4) folgt dann aus (3.14) bis (3.18).

Unmittelbar klar ist wegen (5.5,2) die

(5.6) Bemerkung:

Ist (5.1) erfüllt, so ist die gemäß (5.3) und (5.5) gebildete Familie $\tilde{u} = (u_t)_{t \in \mathbb{N}}$ unabhängig von der Wahl der $\phi^{(i)}$ aus $\mathcal{M}_2(\mathcal{G}^{(i)})$, $i \in J$, (m-fast).

Im Spezialfall $J = \{1\}$ ist (5.1) sicher genau dann gegeben, wenn (4.10) gilt und $\phi^{(1)} := \phi$ aus $\mathcal{M}_2(\mathcal{G})$ ist.

(5.7) Folgerung:

Ist (4.10) erfüllt, ist $\phi \in \mathcal{M}_2(\mathcal{G})$ und ist $\tilde{u} := \psi(\phi)$ gemäß (4.13), so gilt:

- a) $\psi(\mathcal{M}_2(\mathcal{G})) = \mathcal{M}_2(\mathcal{G}) \cap \mathcal{M}_3(\mathcal{G})^{(\mathbb{N})} \{\tilde{u}\}$ (vgl. (4.17,d)).

- b) Für alle $f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{Q})$ ist $\mathcal{E}(f) \stackrel{(m)}{\subseteq} \check{\mathcal{M}} \stackrel{(m)}{\subseteq} \psi(f) \stackrel{(m)}{\subseteq} \stackrel{(m)}{\subseteq} \psi(\mathcal{Q}) \stackrel{(m)}{\subseteq} \mathcal{Q}$ (vgl. (4.15,a)) .
- c) Ist die Familie $(g_t - f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar, so ist $\psi(\mathcal{M}_1(\mathcal{Q}) \cup \{\mathcal{Q}\}) = \mathcal{M}_2(\mathcal{Q}) \stackrel{(m)}{=} \{\check{\mathcal{M}}\} \stackrel{(m)}{=} \{\psi(\mathcal{Q})\}$ (vgl. (4.17,c) und (4.20,a)) .

Beweis:

- a) folgt aus (4.17,d) und (5.6).
- b) Nach (4.15,a) ist lediglich noch $\check{\mathcal{M}} \stackrel{(m)}{\subseteq} \psi(f)$ zu zeigen:
 Weil $f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{Q})$ ist, liegt $\mathcal{E}(f)$ in $\mathcal{M}_0$, und deshalb ist, wie wir im Anschluß an (2.15) festgestellt haben, $\mathcal{M}_2(\mathcal{E}(f))$ nicht leer.
 Sei nun $\tilde{f}$ aus $\mathcal{M}_2(\mathcal{E}(f))$.
 Trivialerweise gilt dann wegen $\mathcal{E}(f) \stackrel{(m)}{\subseteq} \mathcal{Q}$ auch:
 $\tilde{f} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{Q})$. Folglich ist nach a) $\psi(\tilde{f}) \stackrel{(m)}{=} \check{\mathcal{M}}$.
 Andererseits gilt nach (4.17,e) wegen $\mathcal{E}(\tilde{f}) \stackrel{(m)}{\subseteq} \mathcal{E}(f)$,
 daß $\psi(\tilde{f}) \stackrel{(m)}{\subseteq} \psi(f)$ ist.
 Insgesamt folgt also $\psi(f) \stackrel{(m)}{\subseteq} \check{\mathcal{M}}$ für alle $f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{Q})$.
- c) ist klar nach (4.17,c) und (4.20,a) sowie nach Teil b).

§ 6 Die Bestimmung E-optimaler Stopzeiten als Grenzwerte konvergenter Folgen

In diesem Paragraphen wollen wir zwei Fälle behandeln, in denen sich E-optimale Stopzeiten konstruieren lassen, indem man für eine monotone Folge $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Abbildungen $T_j : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ den Grenzwert bestimmt.

In dem einen Fall werden wir in (5.1) $J = \mathbb{N}$ voraussetzen, und wir werden dann die E-optimale Stopzeiten T^* und T_* (siehe (5.5,3)) durch Grenzübergang aus Folgen $(^{(i)}T^*)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(^{(i)}T_*)_{i \in \mathbb{N}}$ berechnen, wobei für jedes $i \in J$ $^{(i)}T^*$ und $^{(i)}T_*$ E-optimale Stopzeiten zu $\tilde{g}^{(i)}$ sind mit $\tilde{g}^{(i)}$ gemäß (5.2).

Im zweiten Fall wird $J = \{1\}$ sein, und wir werden optimale Stopzeiten als Grenzwerte von Folgen $(^kT^*)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(^kT_*)_{k \in \mathbb{N}}$ bzw. $(^k\tilde{T}^*)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(^k\tilde{T}_*)_{k \in \mathbb{N}}$ bestimmen, wobei für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\omega \in \Omega$ gilt:

$$k_{T^*}(\omega), k_{T_*}(\omega), k_{\tilde{T}^*}(\omega), k_{\tilde{T}_*}(\omega) \in \{1, \dots, k\} \cup \{\infty\}.$$

Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz, der in beiden Fällen nützlich ist.

(6.1) Hilfssatz:

Sei Voraussetzung (2.1) erfüllt. Ferner gelte:

- 1) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $T^n : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ eine Abbildung für die gilt:

es existieren $t B^n \in \mathcal{V}_t$, $t \in \mathbb{N}$, so daß mit

$$B_t^n := \bigcup_{1 \leq t} 1 B^n, t \in \mathbb{N}, B_0^n := \emptyset, \text{ für alle } t \in \mathbb{N}$$

die Gleichheit $\{T^n = t\} = \overline{B_t^n \cap B_{t-1}^n}$ richtig ist.

- 2) T_1 und T_2 seien Stopzeiten der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$, so daß für gewisse Mengen ${}_t B, {}_t C \in \mathcal{F}_t$ mit $B_t := \bigcup_{1 \leq t} 1^B$, $C_t := \bigcup_{1 \leq t} 1^C$, $t \in \mathbb{N}$, $B_0 := C_0 := \emptyset$, für alle $t \in \mathbb{N}$ die Beziehungen $\{T_1 = t\} = B_t \cap \overline{B_{t-1}}$ und $\{T_2 = t\} = C_t \cap \overline{C_{t-1}}$ gelten.

Dann gilt:

- a) Ist für alle $t \in \mathbb{N}$ ${}_t B^1 \subset {}_t B^2 \subset \dots \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}_t B^n \subset {}_t C$ und ${}_t B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}_t B^n$ m_t -fast, so existiert $T^\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} T^n = \inf_{n \in \mathbb{N}} T^n$ (m-fast); T^∞ ist Stopzeit der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$, und für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt m_t -fast $\{T^\infty = t\} \subset {}_t C$ und ${}_t B \subset \{T^\infty \leq t\}$.
- b) Ist für alle $t \in \mathbb{N}$ ${}_t B \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}_t B^n \subset \dots \subset {}_t B^2 \subset {}_t B^1$ und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}_t B^n \subset {}_t C$ m_t -fast, so existiert $T^\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} T^n = \sup_{n \in \mathbb{N}} T^n$ (m-fast); T^∞ ist Stopzeit der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$, und für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt m_t -fast $\{T^\infty = t\} \subset {}_t C$ und ${}_t B \subset \{T^\infty \leq t\}$.

Beweis:

- a) α) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in \mathbb{N}$ gilt m_t -fast $\{T^n = t\} = B_t^n \cap B_{t-1}^n \subset {}_t B^n \subset {}_t B^{n+1} \subset \dots \subset {}_t C$.
- β) Aus α) folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast $\{T^n = t\} \subset {}_t B^{n+1} \subset B_t^{n+1} = \{T^{n+1} \leq t\}$, also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ m-fast $T^n \geq T^{n+1}$.

γ) Aus α) folgt ferner für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in \mathbb{N}$
 m_t -fast $\{T^n = t\} \subset {}_tC \subset C_t = \{T_2 \leq t\}$, woraus sich für
 alle $n \in \mathbb{N}$ m -fast $T^n \geq T_2$ ergibt.

δ) Aus β) und γ) erhalten wir die Existenz von $T^\infty :=$
 $:= \lim_{n \rightarrow \infty} T^n = \inf_{n \in \mathbb{N}} T^n$ (mit Werten aus $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$) m -fast.

Dabei gilt m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$: $\{T^\infty \leq t\} =$
 $= \{\inf_{n \in \mathbb{N}} T^n \leq t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T^n \leq t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_t^n \in \mathcal{F}_t$.

ε) Nach Voraussetzung und wegen δ) ist m_t -fast für alle
 $t \in \mathbb{N}$ $\{T_1 = t\} = B_t \cap \overline{B_{t-1}} \subset {}_tB \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}_tB^n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_t^n =$
 $= \{T^\infty \leq t\}$, insbesondere gilt m -fast $T^\infty \leq T_1$ und
 deshalb $m(\{T^\infty < \infty\}) = 1$.

ζ) Wegen δ) und ε) ist T^∞ Stopzeit der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$.
 Für alle $t \in \mathbb{N}$ sind dabei m_t -fast die Beziehungen
 $\{T^\infty = t\} = \{\lim_{n \rightarrow \infty} T^n = t\} \subset \{\omega \in \Omega : \text{für mindestens ein}$
 $n \in \mathbb{N} \text{ ist } T^n(\omega) = t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_t^n \cap \overline{B_{t-1}^n}) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}_tB^n \subset {}_tC$
 und ${}_tB \subset \{T^\infty \leq t\}$ erfüllt (siehe α) und ε)).

b) α) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in \mathbb{N}$ gilt m_t -fast
 $\{T_1 = t\} = B_t \cap \overline{B_{t-1}} \subset {}_tB \subset \dots \subset {}_tB^{n+1} \subset {}_tB^n$.

β) Aus α) folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast
 $\{T^{n+1} = t\} = B_t^{n+1} \cap \overline{B_{t-1}^{n+1}} \subset {}_tB^{n+1} \subset {}_tB^n \subset B_t^n = \{T^n \leq t\}$,
 also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ m -fast $T^n \leq T^{n+1}$.

γ) Aus α) folgt ferner für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in \mathbb{N}$
 m_t -fast $\{T_1 = t\} \subset {}_tB^n \subset B_t^n = \{T^n \leq t\}$, woraus sich für
 alle $n \in \mathbb{N}$ m -fast $T^n \leq T_1$ ergibt.

δ) Aus β) und γ) erhalten wir die Existenz von $T^\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} T^n = \sup_{n \in \mathbb{N}} T^n$ m-fast. Dabei ist $T^\infty \leq T_1$ m-fast und deshalb $m(\{T^\infty < \infty\}) = 1$. Ferner gilt m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$: $\{T^\infty \leq t\} = \{\sup_{n \in \mathbb{N}} T^n \leq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{T^n \leq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_t^n \in \mathcal{F}_t$.

ε) Nach Voraussetzung und wegen α) ist m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$ $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq j} \{T^n = t\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq j} (B_t^n \cap B_{t-1}^n) \subset \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq j} {}_t B^n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}_t B^n \subset {}_t C$.

ζ) Wegen δ) ist T^∞ Stopzeit der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$. Für alle $t \in \mathbb{N}$ sind dabei m_t -fast die Beziehungen $\{T^\infty = t\} = \{\lim_{n \rightarrow \infty} T^n = t\} = \{\omega \in \Omega : \text{es existiert ein } n_0(\omega), \text{ so daß für alle } n \geq n_0(\omega) \text{ } T^n(\omega) = t \text{ ist}\} = \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} \{T^n = t\} \subset {}_t C$ und ${}_t B \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}_t B^n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_t^n = \{T^\infty \leq t\}$ erfüllt (siehe ε), α) und δ)).

Damit können wir jetzt die eingangs beschriebenen Fälle behandeln.

A. Der Fall $J = \mathbb{N}$

(6.2) Satz:

Mit $J = \mathbb{N}$ sei Voraussetzung (5.1) erfüllt.

Wir setzen mit den Bezeichnungen von (5.3) für alle $i \in J$

$$G_t^{(i)} := \bigcup_{1 \leq t} {}_1 G^{(i)}, \quad t \in \mathbb{N}, \quad G_0^{(i)} := \emptyset,$$

$$H_t^{(i)} := \bigcup_{1 \leq t} {}_1 H^{(i)}, \quad t \in \mathbb{N}, \quad H_0^{(i)} := \emptyset.$$

Damit bilden wir die Stopzeiten

$$(i)_{T^*} := \begin{cases} t & \text{auf } G_t^{(i)} \cap \overline{G_{t-1}^{(i)}}, \quad t \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(i)_{T_*} := \begin{cases} t & \text{auf } H_t^{(i)} \cap \overline{H_{t-1}^{(i)}}, \quad t \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

(Daß $(i)_{T^*}$ und $(i)_{T_*}$ Stopzeiten sind, wissen wir nach (5.3), wenn wir die dort definierten $(i)_{T^{(t)}}$ betrachten).

Ferner seien mit $\tilde{M} = (u_t)_{t \in \mathbb{N}}$ gemäß (5.5) die Mengen t^G, t^H, G_t, H_t und die Stopzeiten T^* und T_* wie in (3.3) definiert.

Dann gilt jeweils m-fast:

- a) $(1)_{T^*} \geq (2)_{T^*} \geq \dots \geq T^*$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} (i)_{T^*} = T^*$.
- b) $(1)_{T_*} \leq (2)_{T_*} \leq \dots \leq T_*$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} (i)_{T_*} = T_*$.

Beweis:

- a) Für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $i \in J$ gilt für m_t -fast alle $\omega \in \Omega$:

Ist $\tilde{g}_t^{(i)}(\omega) \stackrel{E}{\neq} \mathcal{E}(\tilde{u}_{t+1}^{(i)} | \mathcal{F}_t)(\omega)$, so ist auch

$$\tilde{g}_t^{(i+1)}(\omega) \stackrel{E}{\neq} \mathcal{E}(\tilde{u}_{t+1}^{(i+1)} | \mathcal{F}_t)(\omega) \text{ und } g_t(\omega) \stackrel{E}{\neq} \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{F}_t)(\omega).$$

Daraus folgt für alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast

$$t^G(1) \subset t^G(2) \subset \dots \subset t^G.$$

Ferner gilt für alle $t \in \mathbb{N}$ und für m_t -fast alle $\omega \in \Omega$:

Ist $g_t(\omega) \stackrel{E}{\neq} \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{F}_t)(\omega)$, so existiert ein $i \in J$

mit $\tilde{g}_t^{(i)}(\omega) \stackrel{E}{\neq} \mathcal{E}(\tilde{u}_{t+1}^{(i)} | \mathcal{F}_t)(\omega)$.

Daraus folgt ${}_tG \subset \bigcup_{i \in J} {}_tG^{(i)}$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$.

Wir können also (6.1,a) anwenden (und zwar mit $T_1 := T_2 := T^*$) und erhalten (unter Berücksichtigung der Beweisteile β), γ) und ϵ) von (6.1,a)):

$(1) T^* \geq (2) T^* \geq \dots \geq T^*$ und $T^* \geq \lim_{i \rightarrow \infty} {}^{(i)}T^* \geq T^*$,
also $T^* = \lim_{i \rightarrow \infty} {}^{(i)}T^*$ (jeweils m -fast).

b) Für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $i \in J$ gilt für m_t -fast alle $\omega \in \Omega$: Ist $\tilde{g}_t^{(i+1)}(\omega) \leq \mathcal{E}(\tilde{u}_{t+1}^{(i+1)} | \mathcal{F}_t)(\omega)$, so ist auch $\tilde{g}_t^{(i)}(\omega) \leq \mathcal{E}(\tilde{u}_{t+1}^{(i)} | \mathcal{F}_t)(\omega)$.

Daraus folgt für alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast

$${}_tH^{(1)} \supset {}_tH^{(2)} \supset {}_tH^{(3)} \supset \dots$$

Ferner gilt für alle $t \in \mathbb{N}$ und für m_t -fast alle $\omega \in \Omega$:

Es ist $g_t(\omega) \leq \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{F}_t)(\omega)$ genau dann, wenn für alle $i \in J$ $\tilde{g}_t^{(i)}(\omega) \leq \mathcal{E}(\tilde{u}_{t+1}^{(i)} | \mathcal{F}_t)(\omega)$ ist.

Daraus folgt ${}_tH = \bigcap_{i \in J} {}_tH^{(i)}$ m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$.

Aus (6.1,b) erhalten wir hieraus (mit $T_1 := T_2 := T^*$) analog wie in Teil a) die Behauptung.

B. Der Fall $J = \{1\}$

(6.3) Voraussetzung:

$g = (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{M}_0$ und $f = (f_t)_{t \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{M}_2(g)$ seien fest gewählt.

Mit (6.3) ist, wie wir wissen, für den Fall $J = \{1\}$ (5.1) gegeben.

(6.4) Definition:

Sei (6.3) erfüllt. Dann setzen wir für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $k \geq t$

$$k_{u_t} := k_{\psi_t}(\mathcal{I}) \quad \text{und} \quad k_{\tilde{u}_t} := k_{\psi_t}(\mathcal{J}) \quad \text{gemäß (4.11)}.$$

Damit definieren wir für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $k > t$ die Mengen:

$$k_{tG} := \{g_t < \mathcal{E}(k_{u_{t+1}} | \mathcal{I}_t)\} , \quad k_{G_t} := \bigcup_{1 \leq t} k_{1G} , \quad k_{G_0} := \emptyset ;$$

$$k_{tH} := \{g_t \leq \mathcal{E}(k_{u_{t+1}} | \mathcal{I}_t)\} , \quad k_{H_t} := \bigcup_{1 \leq t} k_{1H} , \quad k_{H_0} := \emptyset ;$$

$$k_{t\tilde{G}} := \{g_t < \mathcal{E}(k_{\tilde{u}_{t+1}} | \mathcal{J}_t)\} , \quad k_{\tilde{G}_t} := \bigcup_{1 \leq t} k_{1\tilde{G}} , \quad k_{\tilde{G}_0} := \emptyset ;$$

$$k_{t\tilde{H}} := \{g_t \leq \mathcal{E}(k_{\tilde{u}_{t+1}} | \mathcal{J}_t)\} , \quad k_{\tilde{H}_t} := \bigcup_{1 \leq t} k_{1\tilde{H}} , \quad k_{\tilde{H}_0} := \emptyset .$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ bilden wir hiermit die Abbildungen

$$k_{T*} := \begin{cases} t & \text{auf } k_{G_t} \cap \overline{k_{G_{t-1}}} , \quad t < k \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$k_{T*} := \begin{cases} t & \text{auf } k_{H_t} \cap \overline{k_{H_{t-1}}} , \quad t < k \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$k_{\tilde{T}*} := \begin{cases} t & \text{auf } k_{\tilde{G}_t} \cap \overline{k_{\tilde{G}_{t-1}}} , \quad t < k \\ k & \text{sonst} \end{cases}$$

$$k_{\tilde{T}*} := \begin{cases} t & \text{auf } k_{\tilde{H}_t} \cap \overline{k_{\tilde{H}_{t-1}}} , \quad t < k \\ k & \text{sonst} . \end{cases}$$

Ferner setzen wir für alle $t \in \mathbb{N}$

$$u_t := \psi_t(\mathcal{I}) \quad \text{gemäß (4.13,a)} , \quad \mathcal{U} := (u_t)_{t \in \mathbb{N}} ,$$

$$\tilde{u}_t := \psi_t(\mathcal{J}) \quad \text{gemäß (4.14,c)} , \quad \tilde{\mathcal{U}} := (\tilde{u}_t)_{t \in \mathbb{N}} .$$

Wie in (3.3) definieren wir damit die Mengen

$$t^G := \{g_t < \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{I}_t)\} , \quad G_t := \bigcup_{1 \leq t} 1^G , \quad G_0 := \emptyset ,$$

$$t^H := \{g_t \leq \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{F}_t)\} , H_t := \bigcup_{1 \leq t} 1^H , H_0 := \emptyset ,$$

$$t^{\tilde{G}} := \{g_t < \mathcal{E}(\tilde{u}_{t+1} | \mathcal{F}_t)\} , \tilde{G}_t := \bigcup_{1 \leq t} 1^{\tilde{G}} , \tilde{G}_0 := \emptyset ,$$

$$t^{\tilde{H}} := \{g_t \leq \mathcal{E}(\tilde{u}_{t+1} | \mathcal{F}_t)\} , \tilde{H}_t := \bigcup_{1 \leq t} 1^{\tilde{H}} , \tilde{H}_0 := \emptyset ,$$

und schließlich die Abbildungen

$$T^* := \begin{cases} t & \text{auf } G_t \cap \overline{G_{t-1}} , t \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$T_* := \begin{cases} t & \text{auf } H_t \cap \overline{H_{t-1}} , t \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\tilde{T}^* := \begin{cases} t & \text{auf } \tilde{G}_t \cap \overline{\tilde{G}_{t-1}} , t \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\tilde{T}_* := \begin{cases} t & \text{auf } \tilde{H}_t \cap \overline{\tilde{H}_{t-1}} , t \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

(6.5) Bemerkung:

- a) T^* und T_* gemäß (6.4) sind optimale Stopzeiten zu g ,
wie wir aus (5.5,3) wissen.
- b) $\tilde{T}^*$ und $\tilde{T}_*$ gemäß (6.4) sind Stopzeiten; denn nach (4.15,b)
ist $\tilde{H} = \psi(g)$ aus $\mathcal{M}_3(g)$, also erfüllt das Paar
($g, \tilde{H}$) die Voraussetzung (3.1), und aus (3.6) folgt die
Behauptung.

(6.6) Satz:

Unter der Voraussetzung (6.3) gilt mit den Bezeichnungen von
(6.4):

- a) m-fast überall existieren

$$\infty_{T^*} := \lim_{k \rightarrow \infty} k_{T^*} , \infty_{T_*} := \lim_{k \rightarrow \infty} k_{T_*} ,$$

$$\infty_{\tilde{T}^*} := \lim_{k \rightarrow \infty} k_{\tilde{T}^*} , \infty_{\tilde{T}_*} := \lim_{k \rightarrow \infty} k_{\tilde{T}_*} .$$

- b) $\overset{\infty}{T}^*$, $\overset{\infty}{T}_*$, $\widetilde{\overset{\infty}{T}}^*$ und $\widetilde{\overset{\infty}{T}}_*$ sind Stopzeiten der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$, und es gilt m -fast überall

$$T^* = \overset{\infty}{T}^* \geq \overset{\infty}{T}_* \geq T_* \quad \text{sowie} \quad \widetilde{T}^* \geq \widetilde{\overset{\infty}{T}}^* \geq \widetilde{\overset{\infty}{T}}_* = \widetilde{T}_* .$$

- c) $\overset{\infty}{T}^*$ und $\overset{\infty}{T}_*$ sind optimal zu $\mathcal{G}$.

- d) Ist $\mathcal{M} \stackrel{(m)}{=} \mathcal{M}$, so sind auch $\widetilde{\overset{\infty}{T}}^*$ und $\widetilde{\overset{\infty}{T}}_*$ optimal zu $\mathcal{G}$ (vgl. hierzu (5.7,c)); in diesem Fall ist m -fast überall $T^* = \widetilde{T}^* = \overset{\infty}{T}^*$ und $T_* = \widetilde{T}_* = \overset{\infty}{T}_*$.

Beweis:

1. Wir ergänzen unsere Definition aus (6.4) und setzen für alle $t \geq k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$k_{G_t} := \emptyset, \quad k_{G_t} := \bigcup_{1 \leq t} k_{1G}, \quad k_{H_t} := \emptyset, \quad k_{H_t} := \bigcup_{1 \leq t} k_{1H},$$

$$k_{\widetilde{G}_t} := \Omega, \quad k_{\widetilde{G}_t} := \bigcup_{1 \leq t} k_{1\widetilde{G}}, \quad k_{\widetilde{H}_t} := \Omega, \quad k_{\widetilde{H}_t} := \bigcup_{1 \leq t} k_{1\widetilde{H}}.$$

Trivialerweise läßt sich für alle $k \in \mathbb{N}$ schreiben:

$$k_{T^*} = \begin{cases} t & \text{auf } k_{G_t} \cap \overline{k_{G_{t-1}}} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{N}$$

$$k_{T_*} = \begin{cases} t & \text{auf } k_{H_t} \cap \overline{k_{H_{t-1}}} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{N}$$

$$k_{\widetilde{T}^*} = \begin{cases} t & \text{auf } k_{\widetilde{G}_t} \cap \overline{k_{\widetilde{G}_{t-1}}} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{N}$$

$$k_{\widetilde{T}_*} = \begin{cases} t & \text{auf } k_{\widetilde{H}_t} \cap \overline{k_{\widetilde{H}_{t-1}}} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{N}$$

2. Wir zeigen, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast folgende Relationen gelten:

$$\alpha) \quad {}_t^k G \subset {}_t^{k+1} G \subset \bigcup_{l \in \mathbb{N}} {}_t^l G = {}_t^G$$

$$\beta) \quad {}_t^k H \subset {}_t^{k+1} H \subset \bigcup_{l \in \mathbb{N}} {}_t^l H \subset {}_t^H$$

$$\gamma) \quad {}_t^{\tilde{G}} \subset \bigcap_{l \in \mathbb{N}} {}_t^l \tilde{G} \subset {}_t^{k+1} \tilde{G} \subset {}_t^{k\tilde{G}}$$

$$\delta) \quad {}_t^{\tilde{H}} = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} {}_t^l \tilde{H} \subset {}_t^{k+1} \tilde{H} \subset {}_t^{k\tilde{H}}$$

Nur für $k > t$ ist etwas zu beweisen:

Nach (4.13,a) und (4.14,a) gilt m_t -fast für alle $t \in \mathbb{N}$ und alle $k > t$

$${}_t^k u_t \leq {}_t^{k+1} u_t \leq u_t \quad \text{und} \quad {}_t^{\tilde{k}} \tilde{u}_t \geq {}_t^{k+1} \tilde{u}_t \geq \tilde{u}_t, \quad \text{und deshalb}$$

$${}_t^k G \subset {}_t^{k+1} G \subset {}_t^G, \quad {}_t^k H \subset {}_t^{k+1} H \subset {}_t^H, \quad \text{sowie}$$

$${}_t^{\tilde{k}} \tilde{G} \subset {}_t^{k+1} \tilde{G} \subset {}_t^{k\tilde{G}} \quad \text{und} \quad {}_t^{\tilde{k}} \tilde{H} \subset {}_t^{k+1} \tilde{H} \subset {}_t^{k\tilde{H}}.$$

Ferner ergibt sich nach (4.12) und (4.8,d) bzw. nach (4.14,e) für alle $t \in \mathbb{N}$ m_t -fast:

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{E}({}_t^k u_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}({}_t^k u_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{F}_t),$$

$$\text{bzw.} \quad \inf_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{E}({}_t^{\tilde{k}} \tilde{u}_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}({}_t^{\tilde{k}} \tilde{u}_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \mathcal{E}(\tilde{u}_{t+1} | \mathcal{F}_t).$$

Für alle $t \in \mathbb{N}$ folgt daraus, daß $g_t(\omega) < \mathcal{E}(u_{t+1} | \mathcal{F}_t)(\omega)$ (bzw. $g_t(\omega) \leq \mathcal{E}(\tilde{u}_{t+1} | \mathcal{F}_t)(\omega)$) m_t -fast genau dann richtig ist, wenn $g_t(\omega) < \mathcal{E}({}_t^k u_{t+1} | \mathcal{F}_t)(\omega)$ für mindestens ein $k > t$ (bzw. $g_t(\omega) \leq \mathcal{E}({}_t^{\tilde{k}} \tilde{u}_{t+1} | \mathcal{F}_t)(\omega)$ für alle $k > t$) gilt.

Wir erhalten also ${}_t^G = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} {}_t^l G$ und ${}_t^{\tilde{H}} = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} {}_t^l \tilde{H}$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

3. Wegen 2,a) können wir (6.1,a) anwenden (mit $T_1 := T_2 := T^*$).

Folglich existiert ${}^\infty T^* := \lim_{k \rightarrow \infty} {}^k T^* = \inf_{k \in \mathbb{N}} {}^k T^*$ m -fast,

${}^\infty T^*$ ist Stopzeit, und es gilt für alle $t \in \mathbb{N}$

m_t -fast $\{\overset{\infty}{T}^* = t\} \subset {}_tG \subset \{\overset{\infty}{T}^* \leq t\}$, also $G_t = \{\overset{\infty}{T}^* \leq t\}$,
woraus m -fast $T^* = \overset{\infty}{T}^*$ folgt.

Wegen 2,a) gilt ferner ${}_tG = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} {}_tG \subset \bigcup_{l \in \mathbb{N}} {}_tH$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

Deshalb und wegen 2,β) erhalten wir aus (6.1,a) (mit

$T_1 := T^*$ und $T_2 := T_*$): es existiert m -fast

$\overset{\infty}{T}_* := \lim_{k \rightarrow \infty} k_{T_*} = \inf_{k \in \mathbb{N}} k_{T_*}$, $\overset{\infty}{T}_*$ ist Stopzeit, und für alle
 $t \in \mathbb{N}$ gelten m_t -fast die Beziehungen $\{\overset{\infty}{T}_* = t\} \subset {}_tH$
und ${}_tG \subset \{\overset{\infty}{T}_* \leq t\}$, woraus nach (3.10) folgt: $\overset{\infty}{T}_*$ ist
optimal zu ϕ , und es ist m -fast $T^* = \overset{\infty}{T}^* \geq \overset{\infty}{T}_* \geq T_*$.

Wegen 2,δ) läßt sich (6.1,b) anwenden (mit $T_1 := T_2 := \tilde{T}_*$).

Folglich existiert $\tilde{\tilde{T}}_* := \lim_{k \rightarrow \infty} k_{\tilde{T}_*} = \sup_{k \in \mathbb{N}} k_{\tilde{T}_*}$ m -fast, $\tilde{\tilde{T}}_*$

ist Stopzeit, und für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt m_t -fast

$\{\tilde{\tilde{T}}_* = t\} \subset {}_t\tilde{H} \subset \{\tilde{\tilde{T}}_* \leq t\}$, also $\tilde{H}_t = \{\tilde{\tilde{T}}_* \leq t\}$, wo-
raus m -fast $\tilde{T}_* = \tilde{\tilde{T}}_*$ folgt.

Wegen 2,δ) gilt ferner $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} {}_t\tilde{G} \subset \bigcup_{l \in \mathbb{N}} {}_t\tilde{H} = {}_t\tilde{H}$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$.

Deshalb und wegen 2,γ) ergibt sich aus (6.1,b) (mit $T_1 := \tilde{T}^*$

und $T_2 := \tilde{T}_*$): es existiert m -fast $\tilde{\tilde{T}}^* := \lim_{k \rightarrow \infty} k_{\tilde{T}^*} = \sup_{k \in \mathbb{N}} k_{\tilde{T}^*}$,

$\tilde{\tilde{T}}^*$ ist Stopzeit, und für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt m_t -fast

$\{\tilde{\tilde{T}}^* = t\} = {}_t\tilde{H}$ und ${}_t\tilde{G} \subset \{\tilde{\tilde{T}}^* \leq t\}$, woraus nach (3.10)

m -fast die Abschätzung $\tilde{T}^* \geq \tilde{\tilde{T}}^* \geq \tilde{\tilde{T}}_* = \tilde{T}_*$ folgt.

Insgesamt haben wir so die Aussagen a), b) und c) nachgewie-
sen; d) ist dann trivial.

In diesem Zusammenhang sei folgende Eigenschaft der Stopzeiten
 $k_{\tilde{T}^*}$ und $k_{\tilde{T}_*}$, $k \in \mathbb{N}$, erwähnt:

(6.7) Bemerkung:

Ist (4.10) erfüllt und wird für $k \in \mathbb{N}$

$R^k := \{ \int_{\Omega} g_{T_k} dm : T_k \text{ ist Stopzeit der Familie}$

$(\mathcal{T}_t)_{t \in \mathbb{N}} \text{ mit } T_k \leq k \}$

gesetzt, so läßt sich mit Hilfe der $k_{\tilde{u}_t} := k_{\psi_t(\mathcal{G})}$,
 $t \leq k$, das Minimum von R^k bestimmen, und es gilt mit
 $k_{\tilde{T}^*}$ und $k_{\tilde{T}^*}$ gemäß (6.4):

$$\int_{\Omega} k_{\tilde{u}_1} dm = \int_{\Omega} g_{k_{\tilde{T}^*}} dm = \int_{\Omega} g_{k_{\tilde{T}^*}} dm \text{ ist minimal in } R^k.$$

Dies folgt aus [8], Satz (7.2), oder auch aus [5], (3.25).

Aus [6] ergibt sich ein Beispiel dafür, daß in Satz (6.6,b)
 $\tilde{T}^* > \tilde{T}^*$ sein kann. Wir wollen nun noch ein Beispiel an-
 geben, bei dem in (6.6,b) $\tilde{T}^* > T^*$ richtig ist.

(6.8) Beispiel:

Seien $(\Omega, \mathcal{T}, m)$ und $(\mathcal{T}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ definiert wie im Beispiel
 (*) im Beweis von (2.13, \gamma).

Wir setzen $g_1(n) := 0$ für alle $n \in \mathbb{N} = \Omega$,

$$\text{und für alle } t \geq 2 \quad g_t(n) := \begin{cases} t, & n \leq t-2 \\ 3-t, & n=t-1 \\ \frac{3}{2}-t, & n \geq t \end{cases}$$

$g_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist m_t -integrierbar für jedes $t \in \mathbb{N}$;

ferner gilt $\liminf_{t \in \mathbb{N}} g_t(n) = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\text{und } \inf_{t \in \mathbb{N}} g_t(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ \frac{3}{2} - n, & n \geq 2 \end{cases}, \text{ woraus } \int_{\Omega} \inf_{t \in \mathbb{N}} g_t(n) dm > -\infty$$

folgt.

$g := (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$ erfüllt also (2.12, I), insbesondere ist $g \in \mathcal{M}_0$.

Nach (2.15, c) und (2.13, 6, 2) ist $f := (f_t)_{t \in \mathbb{N}}$, definiert gemäß $f_t := \inf_{j \geq t} g_j$ für alle $t \in \mathbb{N}$, aus $\mathcal{M}_2(g)$.

(6.3) ist also gegeben.

Sei nun T eine Stopzeit der Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$:

1. Fall:

Sei $T(n) = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $T(n) \equiv 1$ nach Definition von $\mathcal{F}_1$.

Wir setzen für alle $n \in \mathbb{N}$ $T_1(n) := 1$, und es gilt

$$\int_{\Omega} g_{T_1}(n) \, d\mu = 0.$$

2. Fall:

Sei $T \geq 2$ und es existiere ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g_T(n) = \frac{3}{2} - T(n)$.

Sei $k := \min \{n \in \mathbb{N} : g_T(n) = \frac{3}{2} - T(n)\} \quad (\geq 2)$.

Wir behaupten:

- i) $T(\omega) = k$ für alle $\omega \geq k$;
- ii) $g_T(\omega) \geq 2 - \omega$ für alle $\omega < k$;
- iii) $\int_{\Omega} g_T(\omega) \, d\mu > 0$.

Beweis hierfür:

i) Ist für $n \in \mathbb{N}$ $g_T(n) = \frac{3}{2} - T(n)$, so ist nach Definition der g_t $T(n) \leq n$, also $n \in \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Folglich gilt nach Definition von $\mathcal{F}_n$:

$n, n+1, n+2, \dots \in \{T \leq n\}$, d.h. für alle $\omega \geq n$ ist $T(\omega) \leq n$.

Insbesondere ist deshalb $T(\omega) \leq k$ für alle $\omega \geq k$.
Wir nehmen an, es existiere ein $\omega_0 \geq k$ mit $T(\omega_0) < k$.
Dann ist $T(\omega_0) \leq k-1$, also $\omega_0 \in \{T \leq k-1\} \in \mathcal{F}_{k-1}$.
Aus der Gestalt von $\mathcal{F}_{k-1}$ ergibt sich wegen $\omega_0 \geq k$,
daß $\{k-1, k, k+1, \dots\} \subset \{T \leq k-1\}$ ist. Daraus folgt
 $T(k-1) \leq k-1$, und nach Definition der g_t ist da-
her $g_T(k-1) = \frac{3}{2} - T(k-1)$, was der Minimalität von
 k widerspricht.

Also gilt $T(\omega) = k$ für alle $\omega \geq k$.

- ii) Ist $\omega < k$, so gilt nach Definition von k , daß
 $g_T(\omega) = \frac{3}{2} - T(\omega)$ ist. Aus der Definition der g_t er-
gibt sich somit $g_T(\omega) \geq g_{\omega+1}(\omega) = 3 - (\omega + 1) = 2 - \omega$.
- iii) Unter Verwendung von Rechenergebnissen aus Beispiel (*)
von (2.13, γ) erhalten wir aus i) und ii):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g_T(\omega) \, d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_T(n)}{2^n} \geq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{2-n}{2^n} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\frac{3}{2} - k)}{2^n} = \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{2}{2^n} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n}{2^n} \right) + \frac{(\frac{3}{2} - k)}{2^{k-1}} = \\ &= \left(2 - \frac{2}{2^{k-1}} \right) - \left(2 - \frac{k+1}{2^{k-1}} \right) + \frac{(\frac{3}{2} - k)}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot (-2+k+1+\frac{3}{2}-k) = \\ &= \frac{1}{2^k} > 0. \end{aligned}$$

3. Fall:

Sei $T \geq 2$ und sei für alle $n \in \mathbb{N}$ $g_T(n) = \frac{3}{2} - T(n)$.
Dann ist nach Definition der g_t für alle $n \in \mathbb{N}$
 $g_T(n) \geq g_{n+1}(n) = 2 - n$ und $\int_{\Omega} g_T(n) \, d\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{2^n} = 2 - 2 = 0$,
und nur für die Stopzeit T_2 , definiert gemäß $T_2(n) := n+1$
für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt hierbei $\int_{\Omega} g_{T_2}(n) \, d\mu = 0$.

Aus Fall 1., 2. und 3. folgt: Die einzigen optimalen Stopzeiten zu $\mathcal{G}$ sind T_1 und T_2 mit $T_1(n) = 1$, $T_2(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $T_* = T_1$ und $T^* = T_2$.

Ferner gilt für alle $t \geq 2$

$$f_t(n) = \inf_{j \geq t} g_j(n) = \begin{cases} g_t(n), & n \leq t-1 \\ \frac{3}{2} - n, & n \geq t \end{cases}$$

Wie man leicht nachrechnet, ist dann für alle $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k_{u_2} \, d\mu &= \int_{\Omega} k_{\phi_2(\mathcal{L})} \, d\mu = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{g_{n+1}(n)}{2^n} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\inf_{j \geq k} g_j(n)}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{2-n}{2^n} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\frac{3}{2} - n)}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{2^n} = 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Nach Definition von $\mathcal{F}_1$ ist deshalb $\mathcal{E}(k_{u_2} | \mathcal{F}_1) = \int_{\Omega} k_{u_2} \, d\mu < 0$ für alle $k \geq 2$.

Folglich ist $k_H = \{g_1 \leq \mathcal{E}(k_{u_2} | \mathcal{F}_1)\} = \emptyset$ und damit $k_{T_*} \geq 2$ für alle $k \geq 2$.

Daraus folgt $T_* \geq 2$ und, da T_* optimal ist, $T_* = T_2$. Also ist $T_* > T_1$, wie behauptet war.

Schließlich sei noch bemerkt, daß man auch bei $J \neq \{1\}$ unter Voraussetzung (5.1) für jedes $i \in J$ auf ähnliche Weise wie in (6.4) Folgen von Abbildungen $(\binom{i}{k} T_*)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\binom{i}{k} T_*)_{k \in \mathbb{N}}$ definieren kann, so daß $\lim_{k \rightarrow \infty} \binom{i}{k} T_*$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \binom{i}{k} T_*$ existieren und E-optimale Stopzeiten zu den in (5.2) definierten $\tilde{g}^{(i)}$ sind. Für $i \geq 2$ setzt man dazu mit $\tilde{u}^{(i-1)} = (\tilde{u}_t^{(i-1)})_{t \in \mathbb{N}}$ sowie mit $\tilde{\mathcal{A}}^{(i)}$ und $\tilde{\mathcal{L}}^{(i)}$

gemäß (5.3)

$$k_{\tilde{u}_t}^{(i)} := \left(\tilde{u}_t^{(i-1)} \right. \\ \left. k_{\varphi_t}(\mathcal{G}^{(i)}, \mathcal{I}^{(i)}; \mathcal{K}^{(i)}, \mathcal{L}^{(i)}) \right), \quad t \in \mathbb{N}, \quad k \geq t;$$

und man definiert damit die Mengen

$$k_G^{(i)} := \{ \tilde{g}_t^{(i)} \in \mathcal{E}(k_{\tilde{u}_{t+1}}^{(i)} | \mathcal{I}_t) \}, \quad k_{G_t}^{(i)} := \bigcup_{1 \leq t} k_G^{(i)}, \quad k_{G_0}^{(i)} := \emptyset,$$

$$k_H^{(i)} := \{ \tilde{g}_t^{(i)} \in \mathcal{E}(k_{\tilde{u}_{t+1}}^{(i)} | \mathcal{I}_t) \}, \quad k_{H_t}^{(i)} := \bigcup_{1 \leq t} k_H^{(i)}, \quad k_{H_0}^{(i)} := \emptyset,$$

und die Abbildungen

$$(i)_{T^*}^k := \begin{cases} t & \text{auf } k_{G_t}^{(i)} \cap \overline{k_{G_{t-1}}^{(i)}} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \quad t < k$$

$$(i)_{T_*}^k := \begin{cases} t & \text{auf } k_{H_t}^{(i)} \cap \overline{k_{H_{t-1}}^{(i)}} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}, \quad t < k$$

Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} k_{\tilde{u}_t}^{(i)} = \tilde{u}_t^{(i)}$, $t \in \mathbb{N}$, lassen sich die Behauptungen analog zu (6.6) beweisen. Sind dabei $(i)_{T^*}$ und $(i)_{T_*}$ wie in (6.2) definiert (was natürlich auch für $J \neq \mathbb{N}$ möglich ist), so gilt ebenfalls wie in (6.6) m-fast $(i)_{T^*} = \lim_{k \rightarrow \infty} (i)_{T^*}^k \geq \lim_{k \rightarrow \infty} (i)_{T_*}^k \geq (i)_{T_*}$.

§ 7 Anwendung auf die Theorie der Sequenztests

Zum Abschluß unserer Arbeit wollen wir noch zeigen, daß das in § 5 angegebene Konstruktionsverfahren anwendbar ist zur Berechnung statistisch interessanter Punkte des Risikobereichs ω_R eines unendlichstufigen Testproblems. Die Theorie mehrstufiger Tests war überhaupt der Ausgangspunkt dafür, in einer Situation gemäß unserer Voraussetzung (2.1) bei gegebenem $\mathcal{G} = (g_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ Konstruktionsverfahren zu suchen, um die Menge $\{\int_{\Omega} g_T d\mu : T \text{ Stopzeit der Familie } (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}\}$ bezüglich der lexikographischen Ordnung zu minimieren. Zur Einführung in die Theorie der Sequenztests sei auf die Einleitung und die Problemstellung in [9] sowie auf § 1 von [5] verwiesen.

Von grundlegender Bedeutung ist vor allem die Arbeit [9], in der Richter ein mathematisches Modell für endlichstufige Tests aufstellt (vgl. Definition 1 in [9]). Auch wesentliche Beweis- und Konstruktionsmethoden, die bei sequentiellen Tests eine Rolle spielen, sind in [9] bereits eingeführt. So findet die Idee, bei einer gegebenen (endlichen) Familie $(g_t)_{t \leq k}$ von $\mathcal{F}_t$ -meßbaren, μ -integrierbaren Funktionen $g_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ zur Berechnung des E-Minimums der Menge $\{\sum_{t=1}^k \int_{\Omega} g_t d\mu : F_t \in \mathcal{F}_t\}$ die Familie $(w_t)_{t \leq k}$ mit $w_k := g_k$, $w_t := E\text{-min}(g_t, E(w_{t+1} | \mathcal{F}_t))$ für $t < k$ einzuführen, erstmals in [9] ihre Anwendung (siehe dort Hilfssatz 3 und vergleiche dazu unsere Funktionen $k_{\Phi_t}(\mathcal{G})$ gemäß (4.11) sowie die Bemerkung (6.7)).

In [5] verallgemeinert Mammitzsch das Richter'sche Modell und die Aussagen von [9] auf den Fall unendlicher Stufenzahl. Wir halten uns im folgenden an die Terminologie von [5] und denken uns ein Testproblem gegeben, das die Voraussetzung (5.1) von [5] erfüllt.

(5.1) von [5] lautet:

Vorgelegt seien die σ -Körper $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}$ über Ω und die Maße $P_1, \dots, P_n$ auf $\mathcal{F}$. Zu jedem $\omega \in \Omega$ und jedem $t = 1, 2, \dots$ gebe es eine Menge $S(\omega; t) \subset \mathbb{R}^n$, $S(\omega; \infty)$ sei für alle $\omega \in \Omega$ gleich $\{\bar{x}\}$. $H(\omega; t)$ sei die vordere Hülle von $S(\omega; t)$ ^{ka} (soweit diese überhaupt definiert ist). Mit $g(p; \omega; t)$ bzw. $h(p; \omega; t)$ bezeichnen wir die Stützfunktion von $S(\omega; t)$ bzw. $H(\omega; t)$.

Es seien folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) $S(\omega; t) \neq \emptyset$, vorn beschränkt und vorn eckenabgeschlossen für alle $\omega \in \Omega$ und $t = 1, 2, \dots$.
- (2) $g(p; \omega; t)$ sei für jedes $p > 0$ $\mathcal{F}_t$ -meßbar ($t = 1, 2, \dots$).
- (3) $h(p; \omega; t)$ sei für $p = \frac{1}{t}$ ev P_v -integrierbar ($v = 1, \dots, n$; $t = 1, 2, \dots$).
- (4) $\liminf_{t \rightarrow \infty} h(\text{ev}; \omega; t) = +\infty$ P_v -fast überall und $\int_{\Omega} \inf_{t \leq \infty} h(\text{ev}; \omega; t) dP_v > -\infty$ für $v = 1, \dots, n$.

Wir wollen nachweisen, daß unter dieser Voraussetzung für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(r, n)}$, $A > 0$, mit dem in § 5 beschriebenen Konstruktionsverfahren A-Ecken des Risikobereichs $\mathcal{R}$ berechnet werden können. Von derartigen Matrizen sind statistisch besonders zwei Typen von Bedeutung, nämlich

- a) Zeilenmatrizen $A = p' \in \mathbb{R}^{(1, n)}$, welche die Bestimmung von Bayeslösungen erlauben (vgl. [5], (1.4); wie in [5] fassen wir $\mathbb{R}^n$ als Raum der Spaltenmatrizen auf; zu $p \in \mathbb{R}^n$ wird mit p' die transponierte Zeilenmatrix bezeichnet).
- b) Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(r, n)}$ mit $\text{Rang } A = n$ (insbesondere also die invertierbaren Matrizen aus $\mathbb{R}^{(n, n)}$), welche die Berechnung der streng vorderen Extrempunkte von $\mathcal{R}$ ermöglichen (vgl. [5], (2.22)).

In diesem Zusammenhang sei noch folgendes festgestellt:

(7.1) Bemerkung:

1) Man könnte in b) auch alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(r,n)}$, $A \geq 0$, $\text{Rang } A = n$, zulassen, sofern nur alle Komponenten der ersten Zeile von A echt positiv sind. Doch erhält man auch damit lediglich streng vordere Extrempunkte von ∞R . Sind nämlich $a'_1, \dots, a'_r \in \mathbb{R}^{(1,n)}$ die Zeilen einer solchen Matrix $A \geq 0$ mit $a'_i > 0$, und definieren wir dazu bei festem $\lambda > 0$ $\tilde{A}$ als die Matrix mit den Zeilen $a'_1, a'_2 + \lambda a'_1, \dots, a'_r + \lambda a'_1$, so ist $\tilde{A} > 0$, und es gilt für je zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ trivialerweise genau dann $Ax \stackrel{E}{\leq} Ay$, wenn $\tilde{A}x \stackrel{E}{\leq} \tilde{A}y$ gilt.

2) Daß im allgemeinen nicht darauf verzichtet werden kann, die Komponenten der ersten Zeile von A als echt positiv vor auszusetzen, zeigt Beispiel (4.2) von [5].

Wir gehen jetzt aus von einer festen Matrix $A = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(r,n)}$

mit $A > 0$. Für alle $i = 1, \dots, r$ sei $\begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} := a'_i$.

Weiter verwenden wir folgende

(7.2) Bezeichnungen:

Sei (5.1) von [5] erfüllt.

Mit $m := P := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n P_j$ sei $d\vec{P}(\omega) = f(\omega) d\omega$ auf $\mathcal{F}$ (vgl.

hierzu (3.2) von [5]; es ist also mit den dortigen Bezeichnungen $f(\cdot; t) = \mathcal{E}(f | \mathcal{F}_t)$ m_t -fast, $t \in \mathbb{N}$).

Es sei $\begin{pmatrix} f_1(\omega) \\ \vdots \\ f_n(\omega) \end{pmatrix} := f(\omega)$ und $\begin{pmatrix} f_1(\omega; t) \\ \vdots \\ f_n(\omega; t) \end{pmatrix} := f(\omega; t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{N}$.

Zu obiger Matrix A sei $A(\omega; t)$ die Matrix mit den Zeilen

$(a_1 \circ f(\omega; t))', \dots, (a_r \circ f(\omega; t))', e'_1, \dots, e'_n; \omega \in \Omega, t \in \mathbb{N}$.

(Zum Symbol " $\circ$ " siehe (1.2) von [5]). Dabei sind mit $e_1, \dots, e_n$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet; sie werden als Zeilen

angefügt, damit $A(\omega; t)$ den Rang n besitzt (vgl. (3.5) von [5]).

Für alle $\omega \in \Omega$ und alle $t \in \mathbb{N}$ sei dann

$$v(A; \omega; t) = \begin{pmatrix} v_1(A; \omega; t) \\ \vdots \\ v_n(A; \omega; t) \end{pmatrix} \quad \text{die (eindeutig bestimmte)}$$

$A(\omega; t)$ -Ecke von $S(\omega; t)$.

Wir setzen $g_t := A \cdot v(A; \cdot; t) \circ f(\cdot; t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{N}$,

(siehe (1.2) von [5]) und $\mathcal{G} := (g_t)_{t \in \mathbb{N}}$.

Einen Test anzugeben, dessen Risikovektor eine A -Ecke von $\mathcal{R}$ darstellt, ist jetzt natürlich gleichbedeutend damit, zu $\mathcal{G}$ eine E -optimale Stopzeit zu bestimmen. Um zu zeigen, daß hierbei unsere Konstruktion von § 5 zum Ziele führt, haben wir nur noch die Zulässigkeit von $\mathcal{G}$ nachzuweisen. Ist dies geschehen, so haben wir damit sogar die Existenz der A -Ecke von $\mathcal{R}$ gezeigt (vgl. (5.2, (2)) von [5]).

(7.3) Satz: Die in (7.1) definierte Familie $\mathcal{G}$ ist zulässig (bezüglich $\{1, \dots, r\}$) im Sinne von (2.5).

Beweis:

1) Wegen (5.3, (1)) von [5] ist $v(A; \cdot; t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\mathcal{F}_t$ -meßbar für alle $t \in \mathbb{N}$.

Ferner gilt für alle $j = 1, \dots, n$, $\omega \in \Omega$ und $t \in \mathbb{N}$
 $h(e_j; \omega; t) \leq v_j(A; \omega; t) \leq -h(-e_j; \omega; t)$, so daß sich die P_j -Integrierbarkeit von $v_j(A; \cdot; t)$ ergibt.

$v_j(A; \cdot; t) \cdot f_j(\cdot; t)$ ist daher m_t -integrierbar für alle $t \in \mathbb{N}$ und $j = 1, \dots, n$.

Folglich ist $\mathcal{G} \in \mathcal{M}_{\{1, \dots, r\}}$.

2) Wir setzen wie in unserer Voraussetzung (5.1)

$$g_t =: \begin{pmatrix} g_t^{(1)} \\ \vdots \\ g_t^{(r)} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{N}; \quad g^{(i)} := (g_t^{(i)})_{t \in \mathbb{N}}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Dann gilt $g_t^{(i)}(\omega) = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j(A; \omega; t) \cdot f_j(\omega; t)$, $\omega \in \Omega$,
 $t \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, r$.

Ferner setzen wir für alle $i = 1, \dots, r$, $t \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega$:

$$g_t^{(i)*}(\omega) := \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j(A; \omega; t) \cdot f_j(\omega) \quad \text{und} \quad g^{(i)*} := (g_t^{(i)*})_{t \in \mathbb{N}}$$

Für alle $i = 1, \dots, r$ gilt offenbar $\mathcal{E}(g^{(i)*}) \stackrel{(m)}{=} g^{(i)}$.

3) Wegen $v_j(A; \omega; t) \geq h(e_j; \omega; t)$ für alle $j = 1, \dots, n$, $\omega \in \Omega$
 und $t \in \mathbb{N}$ gilt, da wir uns $f(\omega) \geq 0$ gewählt denken können,

$$\begin{aligned} \inf_{t \in \mathbb{N}} g_t^{(i)*}(\omega) &\geq \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot f_j(\omega) \cdot \inf_{t \in \mathbb{N}} v_j(A; \omega; t) \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot f_j(\omega) \cdot \inf_{t \in \mathbb{N}} h(e_j; \omega; t), \quad \omega \in \Omega, \quad i = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit für alle $i = 1, \dots, r$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \inf_{t \in \mathbb{N}} g_t^{(i)*} d\mu &\geq \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot f_j(\omega) \cdot \inf_{t \in \mathbb{N}} h(e_j; \omega; t) d\mu = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \int_{\Omega} \inf_{t \in \mathbb{N}} h(e_j; \omega; t) dP_j > -\infty \quad (\text{wegen (5.1, (4)) von [5]}). \end{aligned}$$

4) Ferner gilt für alle $i = 1, \dots, r$ (bei $f(\omega) \geq 0$):

$$\begin{aligned} \liminf_{t \in \mathbb{N}} g_t^{(i)*}(\omega) &= \liminf_{t \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot v_j(A; \omega; t) \cdot f_j(\omega) \right) \geq \\ &\geq \liminf_{t \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot h(e_j; \omega; t) \cdot f_j(\omega) \right) \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot f_j(\omega) \cdot \liminf_{t \in \mathbb{N}} h(e_j; \omega; t). \end{aligned}$$

Da alle $a_{ij} > 0$ sind, folgt hieraus mit

$$N_j := \{\omega \in \Omega : f_j(\omega) \cdot \liminf_{t \in \mathbb{N}} h(e_j; \omega; t) < \infty\}, j = 1, \dots, n,$$

daß $\liminf_{t \in \mathbb{N}} g_{t_n}^{(i)*}(\omega) = \infty$ für alle ω gilt, die nicht im

Durchschnitt $\bigcap_{j=1}^n N_j$ liegen ($i = 1, \dots, r$).

Dabei ist für alle $j = 1, \dots, n$ $P_j(N_j) =$

$$= P_j(\{\omega \in \Omega : \liminf_{t \in \mathbb{N}} h(e_j; \omega; t) < \infty\} \cup \{\omega \in \Omega : f_j(\omega) = 0\}) = 0$$

(wegen (5.1, (4)) von [5] und nach Definition der f_j).

$$\text{Also gilt } m\left(\bigcap_{j=1}^n N_j\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{l=1}^n P_l\left(\bigcap_{j=1}^n N_j\right) \leq \sum_{l=1}^n P_l(N_l) = 0.$$

Folglich ist m -fast $\liminf_{t \in \mathbb{N}} g_t^{(i)*}(\omega) = \infty$ für $i = 1, \dots, r$.

5) Wegen (2.13, 8) folgt aus 1) bis 4), daß für alle $i = 1, \dots, r$ $q^{(i)}$ in $\mathcal{M}_0$ liegt (siehe (2.12, IV)).

6) Sei T eine Stopzeit mit $\int_{\Omega} g_T^{(1)} dm < \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} \infty &> \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot v_j(A; \cdot; T) \cdot f_j(\cdot; T) dm = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot \int_{\Omega} v_j(A; \cdot; T) \cdot f_j(\cdot; T) dm \end{aligned}$$

Da alle $a_{1j} > 0$ sind, folgt hieraus $\int_{\Omega} v_j(A; \cdot; T) \cdot f_j(\cdot; T) dm < \infty$ für alle $j = 1, \dots, n$.

Also gilt für alle $i = 1, \dots, r$: $\int_{\Omega} g_T^{(i)} dm =$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \int_{\Omega} v_j(A; \cdot; T) \cdot f_j(\cdot; T) dm < \infty, \text{ womit}$$

die Zulässigkeit von q nachgewiesen ist.

Wir sind also jetzt in der Lage, unter Voraussetzung (5.1) von [5] für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(r,n)}$ mit $A \geq 0$ A-Ecken von $\mathbb{R}^n$ bzw. von $\mathbb{R}^{ka}$, der abgeschlossenen konvexen Hülle des Risikobereichs, zu konstruieren (siehe (5.2, (2)) und (3.1) und (3.1) von [5]). Insbesondere können wir für jedes $p \in \mathbb{R}^n$, $p \geq 0$, den Wert der Stützfunktion $g(p; \mathbb{R}^{ka})$ berechnen. (Dabei ist für eine nicht-leere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ die Stützfunktion $g(p; M)$ definiert als $\inf\{p'x : x \in M\}$, $p \in \mathbb{R}^n$, vgl. (2.1) von [5]). Mit Hilfe einiger Sätze über Stützfunktionen, die wir der Arbeit [11] entnehmen, lassen sich daraus durch Limesbildungen auch die vorderen Extrempunkte von $\mathbb{R}^{ka}$ bestimmen (vgl. dazu (2.22) von [5]; wir haben in (7.1), Teil 2), bereits erwähnt, daß nicht für jede Matrix $A \geq 0$ mit $\text{Rang } A = n$ eine A-Ecke von $\mathbb{R}^{ka}$ existieren muß).

(7.4) Bemerkung:

A sei eine Matrix aus $\mathbb{R}^{(r,n)}$ vom Rang n mit den Zeilen $a_1', \dots, a_r'$ und mit $A \geq 0$. Falls die A-Ecke von $\mathbb{R}^{ka}$ existiert, berechnet sich die j-te Komponente ω_j dieser A-Ecke nach folgendem Rekursionsschema:

$$\omega_j = l_r(e_j), \quad e_j \text{ wie in (7.2)}, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\text{wobei} \quad l_0(p) := g(p; \mathbb{R}^{ka}) \quad \text{für } p \geq 0,$$

$$l_0(p) := \lim_{v \rightarrow \infty} l_0\left(\frac{1}{v} p_0 + \left(1 - \frac{1}{v}\right)p\right) \quad \text{für } p \geq 0, \quad p \neq 0, \\ \text{bei festem } p_0 \geq 0,$$

$$l_1(p) := \lim_{\rho \rightarrow \infty} (l_{i-1}(p + \rho a_1) - \rho \cdot l_{i-1}(a_1)) \quad \text{für } p \geq 0,$$

$$l_1(p) := l_1\left(\frac{1}{v} p_0 + \left(1 - \frac{1}{v}\right)p\right) \quad \text{für } p \geq 0, \quad p \neq 0, \\ \text{beim festem } p_0 \geq 0$$

für $i = 1, \dots, r$ gesetzt wird.

(Existiert zu A keine A-Ecke von $\mathbb{R}^{ka}$, so ergibt sich bei diesem Verfahren $l_i(p) = \infty$ für ein $i \in \{1, \dots, r\}$).

Beweis:

1) Mit $R_0 := \omega_R^{ka}$ sowie

$$R_i := \{x \in R_{i-1} : a_i' x = g(a_i; K_{i-1})\} \text{ für } i = 1, 2, \dots, r$$

besteht R_r gerade aus der A-Ecke von ω_R^{ka} .

2) Wir zeigen durch Induktion nach i , daß $l_i(p)$ für alle $p \geq 0$ gleich $g(p; R_i)$ ist:

Der Induktionsanfang bei $i = 1$ ist klar für $p > 0$; für $p \geq 0$, $p \neq 0$, ergibt er sich aus (2.8) von [11].

Gilt für ein $i \geq 1$ die Beziehung $l_{i-1}(p) = g(p; R_{i-1})$ für alle $p \geq 0$, so ist $l_i(p) \geq l_{i-1}(p) > -\infty$ für alle $p > 0$ (wegen (2.6) und (2.5) von [11]), und aus (2.10) von [11] (vgl. auch (2.6, (2)) und (2.7) von [5]) folgt deshalb $l_i(p) = g(p; R_i)$ zunächst für alle $p > 0$, dann wegen (2.8) von [11] auch für alle $p \geq 0$.

3) Aus 1) und 2) folgt die Behauptung.

Liste der verwendeten Symbole und Bezeichnungen

$\leq, <$	S. 5
$E, E_{\neq}$	S. 4
E-min	S. 5
ess-E-min, ess-E-inf	S. 28
E-optimal, optimal	S. 8
$\mathcal{E}(Q)$	S. 7
$(\underline{m}), (\underline{m})$	S. 11
$\tilde{m}_J, m_J, \tilde{m}, m$	S. 7
m_J^o, m_o	S. 9
$m_1(Q), m_2(Q), m_3(Q)$	S. 16
Snell'sche Enveloppe	S. 29
verträglich	S. 32
zulässig	S. 9
$k_{\varphi_t}(Q, f; \mathcal{R}, \mathcal{L})$	S. 36
$k_{\varphi_t}(f)$	S. 37
$\varphi_t(f)$	S. 40
$\varphi(f)$	S. 42
$k_{\psi_t}(f)$	S. 43
$\psi_t(f), \psi(f)$	S. 44
$\psi_t(Q)$	S. 44
$\psi(Q)$	S. 46

Literaturverzeichnis

- [1] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge
 der Maßtheorie
 Walter de Gruyter, Berlin 1968
- [2] Chow, Y.S.; On optimal stopping rules
 Robbins, H.: Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 2,
 33 - 49, 1963
- [3] Chow, Y.S.; Great Expectations: The Theory of Optimal
 Robbins, H.; Stopping
 Siegmund, D.: Houghton Mifflin Company Boston 1971
- [4] Krieger, W.: On the existence of optimal sampling
 rules
 Unveröffentlichtes Manuskript
- [5] Mammitzsch, V.: Bayeslösungen bei mehrstufigen Tests
 Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 19,
 123 - 166, 1971
- [6] Mammitzsch, V.; Zur Konstruktion optimaler Sequenztests
 Fuchs, H.W.: Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 27,
 257 - 262, 1973
- [7] Mertens, J.F.: Théorie des processus stochastiques
 généraux applications aux surmartingales
 Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 22,
 45 - 68, 1972
- [8] Pilzwegger, K.: Endlichstufige Tests bei nicht notwendig
 endlich vielen Hypothesen
 Dissertation München 1971
- [9] Richter, H.: Endlichstufige Tests mit abhängigen Beob-
 achtungen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie
 verw. Geb. 2, 22 - 32, 1963
- [10] Siegmund, D.: Some problems in the theory of optimal
 stopping rules
 Ann. math. Statistics 38, 1627 - 1640,
 1967
- [11] Wegmann, R.: Der Wertebereich von Vektorintegralen.
 Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.
 14, 203 - 238, 1969/70

L e b e n s l a u f

1.11.1945	geboren in Kirchdorf a.H. als Sohn des Laboranten Franz Baur und seiner Ehefrau Anna, geb. Hörand
1951 - 1956	Schüler der Volksschule in Heufeld
1956 - 1965	Besuch des Humanistischen Gymnasiums in Traunstein und Rosenheim
Juli 1965	Reifeprüfung in Rosenheim
1.10.1965 - 31.3.1967	Grundwehrdienst in Degerndorf/Inn
Mai 1967 - Juni 1972	Studium der Mathematik an der Universität München
23.6.1972	Abschluß der Diplomhauptprüfung in Mathematik
1.12.1972 - 31.7.1974	Stipendiat nach dem Graduiertenförderungsgesetz
seit 1.8.1974	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Augsburg

